



MÉMOIRE

SUR

L'ACCÉLÉRATION SÉCULAIRE DU MOUVEMENT

DE LA LUNE,

PAR V. PUISEUX,

MEMBRE DE L'INSTITUT (ACADÉMIE DES SCIENCES).



PARIS.

IMPRIMERIE NATIONALE.

M DCCC LXXIII

MÉMOIRE

SUR

L'ACCÉLÉRATION SÉCULAIRE DU MOUVEMENT DE LA LUNE.



EXTRAIT DU TOME XXI

DES MÉMOIRES PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

À L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'INSTITUT DE FRANCE.

MÉMOIRE

SUR

L'ACCÉLÉRATION SÉCULAIRE DU MOUVEMENT

DE LA LUNE,

PAR V. PUISEUX,

MEMBRE DE L'INSTITUT (ACADÉMIE DES SCIENCES).



PARIS.

IMPRIMERIE NATIONALE.

M DCCC LXXIII.

MÉMOIRE

SUR

L'ACCÉLÉRATION SÉCULAIRE DU MOUVEMENT

DE LA LUNE.

Si le moyen mouvement de la Lune était uniforme, l'expression de la longitude moyenne de cet astre en fonction du temps serait de la forme $A+Bt$, A et B désignant des nombres constants. Mais on sait, au contraire, que ce mouvement s'accélère actuellement de siècle en siècle, en sorte que l'expression précédente doit être complétée par un terme de la forme Ct^2, C désignant un nombre qui peut lui-même être variable avec le temps, et que nous appellerons le *coefficient de l'accélération séculaire*.

Supposons le temps exprimé en siècles de cent années juliennes et compté à partir de l'époque actuelle, du 1er janvier 1850, par exemple : on trouve que, pour rendre compte de quelques éclipses observées dans l'antiquité, il faut attribuer au coefficient C une valeur de douze secondes environ, pour les époques qui précèdent la nôtre de vingt et quelques siècles.

Laplace, en cherchant l'explication théorique de ce fait, a trouvé que la diminution de l'excentricité de l'orbite de la Terre, causée par les actions perturbatrices des autres planètes, devait accélérer, en effet, le mouvement de notre satellite; mais comme

le coefficient de l'accélération séculaire, conclu de cette seule considération et calculé d'ailleurs avec toute l'exactitude nécessaire [1], n'est guère que la moitié de celui qui paraît résulter des anciennes éclipses, on a été conduit à attribuer ce désaccord à quelque influence dont on n'aurait pas tenu compte jusqu'à présent. C'est ainsi que l'attraction exercée sur la Lune par le bourrelet liquide que les marées soulèvent à la surface des océans a été signalée comme pouvant, à la longue, accélérer le mouvement de cet astre, en même temps que l'action réciproque de la Lune sur ce bourrelet altérerait la constance du jour sidéral. Mais avant d'introduire dans la théorie de la Lune un effet de ce genre, dont le calcul rigoureux paraît bien difficile dans l'état actuel de la science, il m'a semblé qu'il convenait de ne négliger aucun terme sensible parmi ceux que fournit la théorie ordinaire, dans laquelle on n'a pas égard au changement de forme de la partie liquide de la Terre. En me plaçant à ce point de vue, je me suis demandé s'il était bien démontré que le déplacement séculaire du plan de l'orbite terrestre n'eût aucune influence sur l'accélération du mouvement de la Lune.

Laplace, Poisson, Plana ont admis que le plan de l'orbite lunaire se déplace en même temps que celui de l'orbite terrestre, de manière que l'inclinaison mutuelle de ces deux plans conserve une valeur moyenne constante, et ils en ont conclu qu'on pouvait, dans la théorie de la Lune, considérer le plan de l'écliptique comme un plan fixe. Ils ont pris ce plan pour un des plans coordonnés, et l'expression de la longitude de la Lune à laquelle ils ont été conduits s'est trouvée nécessairement indépendante du déplacement de l'écliptique.

Mais les illustres auteurs que je viens de nommer ne sont arrivés à ce résultat qu'en se contentant d'une approximation limitée, relativement à l'inclinaison φ de l'orbite lunaire, aux

[1] Une première approximation avait donné à Laplace une valeur de ce coefficient voisine de 10 secondes : les calculs plus complets de MM. Adams et Delaunay ont montré que cette valeur devait être réduite à 6",1.

excentricités e et e' des orbites de la Lune et du Soleil et au rapport $\frac{a}{a'}$ de leurs demi-grands axes : on peut se demander si les mêmes conclusions subsistent encore lorsqu'on tient compte de puissances plus élevées de ces petites quantités.

On aperçoit aisément que, si l'on rapporte le mouvement de la Lune à des plans invariables, dont l'un soit la position de l'écliptique à l'époque prise pour origine du temps, il s'introduit dans l'expression de la dérivée de la longitude des termes proportionnels au carré de l'inclinaison φ' du plan de l'écliptique mobile. Au degré d'approximation où se sont arrêtés les géomètres déjà cités, ces termes se détruisent; mais admettons qu'il n'en soit plus ainsi lorsqu'on pousse plus loin l'approximation, et soit $c\varphi'^2$ la somme des termes de ce genre; il en résultera, dans la longitude même de la Lune, la partie $c\int\varphi'^2dt$.

Pendant un temps considérable, on peut regarder l'inclinaison φ' comme proportionnelle au temps et poser $\varphi'=\alpha t$; la partie de la longitude dont il s'agit sera donc $\frac{1}{3}c\alpha^2t^3$ et croîtra comme le cube du temps. Un pareil terme pourrait être insensible pendant un certain nombre de siècles avant et après l'époque actuelle, mais acquérir une valeur appréciable aux époques éloignées, telles que celles des anciennes éclipses. Il aurait alors pour effet de modifier le coefficient de l'accélération qui conviendrait à ces temps reculés; car, en l'ajoutant au terme c_1t^2 qui résulte de la diminution de l'excentricité de l'orbite terrestre, on obtient une somme de la forme $(c_1+ct)t^2$, dans laquelle t^2 est multiplié par une quantité variable avec le temps. Il importe donc, pour la comparaison des éclipses historiques avec la théorie, de s'assurer s'il existe dans l'expression de la longitude de la Lune des termes proportionnels à une puissance du temps supérieure à la seconde, et d'en déterminer la grandeur.

L'examen de cette question est l'objet du présent Mémoire, que je divise en trois sections. Dans la première, je reproduis, sauf quelques changements dans la forme, l'analyse de Poisson, et je

conclus, comme lui, qu'au degré d'approximation dont il s'est contenté, le déplacement du plan de l'écliptique n'influe pas sur l'accélération du mouvement de la Lune. Dans les deux autres sections, je reprends le problème, en poussant plus loin l'approximation, relativement aux quantités φ, e, e', $\frac{a}{a'}$. Mais alors se présente une difficulté, qui tient au déplacement rapide du nœud de l'orbite lunaire.

Dans les théories des planètes et de la Lune, il y a deux sortes d'approximations à considérer : l'une est ordonnée suivant les puissances des excentricités, des inclinaisons et du rapport des grands axes des orbites; l'autre, suivant les puissances de la force perturbatrice. Ne nous occupons, en ce moment, que de la dernière. Quand il s'agit des planètes, la méthode qu'on suit ordinairement consiste à regarder d'abord les éléments elliptiques comme constants dans les expressions de leurs dérivées; l'intégration fournit alors des valeurs des éléments où les erreurs sont de l'ordre du carré de la force perturbatrice; puis, à l'aide de ces valeurs approchées, on en forme de plus exactes, où les erreurs sont de l'ordre du cube de la force perturbatrice, et ainsi de suite. Voici maintenant ce qui arriverait si l'on appliquait à la question qui nous occupe cette méthode d'approximations successives.

Nommons n et n' les vitesses angulaires moyennes de la Lune et du Soleil autour de la Terre : la fraction $\frac{n'^2}{n^2}$ caractérise, dans la théorie de la Lune, l'ordre de grandeur de la force perturbatrice, et, pour que les approximations successives fussent réellement convergentes, il faudrait que les parties des éléments fournies par chacune d'elles continssent le facteur $\frac{n'^2}{n^2}$ une fois de plus que les parties fournies par l'approximation précédente. Or, c'est ce qui n'a pas lieu pour les parties de la longitude de la Lune, proportionnelles à $\int \varphi'^2 dt$.

En effet, il y a d'abord, dans la fonction perturbatrice R, un

terme non périodique de la forme $n'^2 K \varphi'^2$, K étant de l'ordre zéro relativement à la force perturbatrice; il en résulte, à la première approximation, dans l'expression de la longitude, une partie de la forme $\frac{n'^2}{n} K \int \varphi'^2 dt$. Mais θ et θ' désignant les longitudes des nœuds ascendants de l'orbite lunaire et de l'écliptique, il y a aussi dans R un terme de la forme $n'^2 K \varphi' \cos(\theta - \theta')$; il en résulte, dans la dérivée par rapport au temps de chaque élément de la Lune, une partie de la forme $\frac{n'^2}{n} K \varphi' \frac{\sin}{\cos} (\theta - \theta')$: on a d'ailleurs à peu près

$$\theta = \text{const} - \frac{3}{4} \frac{n'^2}{n} t.$$

Si donc on intègre, en traitant comme des constantes les quantités φ' et θ', qui varient très-lentement, on voit que le facteur $\frac{n'^2}{n}$ disparaît, et que l'élément considéré contiendra une partie de la forme $K \varphi' \frac{\cos}{\sin} (\theta - \theta')$.

Lorsque ensuite on voudra passer à la seconde approximation, il faudra, dans les dérivées des éléments, augmenter ceux-ci des inégalités fournies par la première approximation. Or quand, dans une expression de la forme $\frac{n'^2}{n} K \varphi' \frac{\sin}{\cos} (\theta - \theta')$, on augmente les éléments qui y figurent de quantités qui sont elles-mêmes de la forme $K \varphi' \frac{\cos}{\sin} (\theta - \theta')$, il en résulte des termes non périodiques de la forme $\frac{n'^2}{n} K \varphi'^2$. La seconde approximation amènera donc, dans la dérivée de la longitude, des parties de cette dernière forme et, par suite, dans la longitude elle-même, des termes de la forme $\frac{n'^2}{n} K \int \varphi'^2 dt$, c'est-à-dire du même ordre de grandeur que ceux qu'avait fournis la première approximation. En poursuivant ce raisonnement, on voit qu'il en serait de même des approximations suivantes : la méthode des approximations successives, telle qu'on la pratique dans la théorie des planètes, donnerait donc le coefficient de $\int \varphi'^2 dt$ dans la longitude de la Lune sous la forme d'une série non convergente, et, par conséquent, elle doit être rejetée.

Pour éviter cette difficulté, j'emprunte à M. Delaunay[1] l'idée qui sert de base à sa *Théorie de la Lune*, et qui consiste à intégrer les équations du mouvement de cet astre, en réduisant d'abord la fonction R à sa partie non périodique accompagnée seulement du terme périodique relatif à un certain argument. Dans le cas actuel, je joins à la partie non périodique les deux termes dont les arguments sont $\theta-\theta'$ et $2\theta-2\theta'$. Il est inutile d'avoir égard à ceux qui ont pour arguments des multiples plus élevés de $\theta-\theta'$, car les parties non périodiques qui pourraient en résulter dans la dérivée de la longitude de la Lune renfermeraient le facteur φ'^2 au moins, et seraient certainement négligeables dans les limites des temps historiques.

La fonction perturbatrice étant ainsi réduite, on peut intégrer, non plus seulement par approximation, mais rigoureusement. Pour avoir égard ensuite aux termes de la fonction perturbatrice qu'on a laissés de côté, il faudra regarder les constantes introduites par l'intégration comme de nouvelles variables; mais alors les dérivées de ces variables ne contiendront plus de termes dépendant des arguments $\theta-\theta'$, $2\theta-2\theta'$, ou du moins ne contiendront de pareils termes qu'avec des coefficients du second ordre relativement à la force perturbatrice, et la méthode des approximations successives deviendra applicable.

Nommons R_1 ce que devient R quand on y supprime tous les termes périodiques autres que ceux qui ont $\theta-\theta'$ et $2\theta-2\theta'$ pour arguments. L'intégration des équations auxquelles se réduisent les équations différentielles du mouvement de la Lune, quand on remplace R par R_1, est l'objet de la seconde section du Mémoire, et elle me conduit, entre autres conclusions, à celle-ci :

La fonction perturbatrice étant supposée réduite à sa partie R_1, si la longitude de la Lune contenait un terme en $\int \varphi'^2 dt$, et

[1] Dans la partie de sa *Théorie de la Lune* qu'il a publiée, M. Delaunay fait abstraction des changements qu'éprouvent les éléments de l'orbite du Soleil. Il suppose donc provisoirement $\varphi' = 0$, et ajourne le calcul qui nous occupe ici des effets dus au déplacement du plan de l'écliptique.

qu'on le représentât par $\frac{n'^2}{n} \mathrm{K} \int \varphi'^2 dt$, le coefficient K serait une fonction de φ, e, e', $\sqrt{\frac{a}{a'}}$ du huitième degré au moins par rapport à ces petites quantités.

Il suit de là qu'en supposant toujours la fonction R réduite à R_1, la longitude de la Lune ne contient pas de terme proportionnel au cube du temps qui soit sensible. Il reste à voir si les parties de R qu'on a d'abord laissées de côté n'en introduisent pas. Cette recherche, plus laborieuse que la précédente, est l'objet de la troisième section : j'y fais voir que les divers termes de la partie $\mathrm{R} - \mathrm{R}_1$ de la fonctiou R introduisent dans la longitude moyenne, à la seconde approximation, des termes en t^4, en t^3 et en t^2 qui proviennent du déplacement de l'écliptique. Mais les termes en t^4 se détruisent deux à deux, et leur somme est nulle; d'un autre côté, la somme des termes en t^2 peut être regardée comme insensible. Reste donc la somme des termes en t^3 : elle n'est pas nulle et on peut la considérer, ainsi qu'il a été dit plus haut, comme modifiant le coefficient de l'accélération aux époques très-éloignées de la nôtre. Toutefois, si l'on en calcule la valeur numérique, on trouve que, pour l'époque des éclipses les plus anciennement observées, les termes en question ont pour effet de diminuer le coefficient de l'accélération séculaire d'une quantité s'élevant à peine à un dixième de seconde. Comme ces éclipses paraissent exiger, au contraire, que ce coefficient soit augmenté et qu'il le soit de plusieurs secondes, on voit que ce n'est pas dans le fait du déplacement du plan de l'orbite terrestre qu'on peut trouver l'explication du désaccord qui semble exister entre la théorie et les observations.

Doit-on chercher à faire disparaître ce désaccord par une interprétation nouvelle des documents historiques relatifs aux anciennes éclipses, ou faut-il lui assigner pour cause l'attraction mutuelle de la Lune et du ménisque soulevé par les marées à la surface de notre globe? C'est ce que je n'entreprendrai pas d'examiner ici. Mais avant de s'engager dans l'une ou l'autre de ces

deux voies, il importait, ce me semble, de vider la question qui fait l'objet du présent Mémoire. A ce point de vue, la conclusion de mes recherches, bien que négative, ne paraîtra peut-être pas entièrement dépourvue d'intérêt.

PREMIÈRE SECTION.

Soient M la masse de la Terre, m celle de la Lune, m' celle du Soleil; a et a' les demi-grands axes des orbites que la Lune et le Soleil décrivent autour de la Terre, e et e' les excentricités de ces orbites, n et n' les vitesses angulaires moyennes des mouvements elliptiques qui sont, à l'époque t, ceux des deux astres; φ et φ' les inclinaisons des plans des orbites sur le plan fixe avec lequel coïncidait l'écliptique à l'époque $t=0$; θ et θ' les longitudes des nœuds ascendants; ϖ et ϖ' les longitudes des périgées; λ et λ' les longitudes moyennes de la Lune et du Soleil à l'époque $t=0$; l et l' les longitudes moyennes des mêmes astres à l'époque t, en sorte qu'on ait

$$l=\int_0^t n\,dt+\lambda, \qquad l'=\int_0^t n'dt+\lambda'.$$

Lorsqu'on cherche les inégalités séculaires du mouvement de la Lune, on peut, sans grande erreur, omettre dans la fonction perturbatrice R les termes périodiques dont les arguments renferment les longitudes moyennes de la Lune et du Soleil, et dont les périodes, par conséquent, sont comparables au mois ou à l'année. Si, de plus, on néglige les produits de quatre dimensions des quantités $e, e', \varphi, \varphi', \sqrt{\frac{a}{a'}}$, on trouve, pour la fonction R, l'expression suivante :

$$R=n'^2\varepsilon a^2\left[-\frac{1}{4}-\frac{3}{8}e^2-\frac{3}{8}e'^2+\frac{3}{8}\varphi^2+\frac{3}{8}\varphi'^2-\frac{3}{4}\varphi\varphi'\cos(\theta-\theta')\right],$$

où ε désigne la fraction très-voisine de l'unité $\frac{1}{1+\frac{M}{m'}}$.

A ce degré d'approximation, les formules qui donnent les dérivées des éléments elliptiques du mouvement de la Lune, savoir :

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{dR}{d\theta}+\frac{\tang\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{dR}{d\varpi}+\frac{dR}{d\lambda}\right),$$

$$\frac{d\theta}{dt}=-\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{dR}{d\varphi},$$

$$\frac{de}{dt}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{dR}{d\varpi}+\frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\frac{dR}{d\lambda},$$

$$\frac{d\varpi}{dt}=-\frac{\tang\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{dR}{d\varphi}-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{dR}{de},$$

$$\frac{da}{dt}=-\frac{2}{na}\frac{dR}{d\lambda},$$

$$\frac{d\lambda}{dt}=\frac{2}{na}\frac{dR}{da}-\frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\frac{dR}{de}-\frac{\tang\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{dR}{d\varphi},$$

se réduisent aux suivantes :

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{3}{4}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\varphi'\sin\left(\theta-\theta'\right),$$

$$\frac{d\theta}{dt}=-\frac{3}{4}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\left[1-\frac{\varphi'}{\varphi}\cos(\theta-\theta')\right],$$

$$\frac{de}{dt}=0,$$

$$\frac{d\varpi}{dt}=\frac{3}{4}\frac{n'^2\varepsilon}{n},$$

$$\frac{da}{dt}=0,$$

$$\frac{d\lambda}{dt}=\frac{n'^2\varepsilon}{n}\left[-1-\frac{9}{8}e^2-\frac{3}{2}e'^2+\frac{9}{8}\varphi^2+\frac{3}{2}\varphi'^2-\frac{21}{8}\varphi\varphi'\cos(\theta-\theta')\right].$$

Pour intégrer les deux premières, nous ferons

$$\varphi\sin\theta=x,\qquad \varphi\cos\theta=y,\qquad \varphi'\sin\theta'=x',\qquad \varphi'\cos\theta'=y';$$

elles nous donneront

$$\frac{dx}{dt}=-\alpha y+\alpha y',\qquad \frac{dy}{dt}=\alpha x-\alpha x',$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\frac{3}{4}\frac{n'^2\varepsilon}{n}=\alpha.$$

Négligeons d'abord les termes en x' et en y' : nous conclurons de ces équations

$$x=A\cos\alpha t-B\sin\alpha t,\qquad y=A\sin\alpha t+B\cos\alpha t,$$

A et B étant des constantes arbitraires. Si maintenant nous voulons tenir compte des termes en x' et en y', nous devrons, dans les valeurs précédentes de x et de y, regarder A et B, non plus comme des constantes, mais comme des fonctions inconnues de t qui devront satisfaire aux équations suivantes :

$$\frac{dA}{dt}=-\alpha x'\sin\alpha t+\alpha y'\cos\alpha t,\qquad \frac{dB}{dt}=-\alpha x'\cos\alpha t-\alpha y'\sin\alpha t.$$

Il en résulte, en appelant A_0 et B_0 deux constantes,

$$A=A_0-\alpha\int x'\sin\alpha t\,dt+\alpha\int y'\cos\alpha t\,dt,$$
$$B=B_0-\alpha\int x'\cos\alpha t\,dt-\alpha\int y'\sin\alpha t\,dt.$$

Or on a, en intégrant par partie,

$$\alpha\int x'\sin\alpha t\,dt=-x'\cos\alpha t+\int\frac{dx'}{dt}\cos\alpha t\,dt,$$

ou sensiblement, à cause de la lenteur avec laquelle x' varie,

$$\alpha\int x'\sin\alpha t\,dt=-x'\cos\alpha t,$$

et pareillement

$$\alpha\int x'\cos\alpha t\,dt=x'\sin\alpha t,\qquad \alpha\int y'\sin\alpha t\,dt=-y'\cos\alpha t,$$
$$\alpha\int y'\cos\alpha t\,dt=y'\sin\alpha t.$$

On en conclut

$$A=A_0+x'\cos\alpha t+y'\sin\alpha t,\qquad B=B_0-x'\sin\alpha t+y'\cos\alpha t,$$

et, par conséquent,

$$x=A_0\cos\alpha t-B_0\sin\alpha t+x',\qquad y=A_0\sin\alpha t+B_0\cos\alpha t+y'.$$

Comme x' et y' s'annulent avec t, on voit que A_0 et B_0 sont les valeurs initiales de x et de y, en sorte que, si l'on représente par φ_0 et θ_0 celles de φ et de θ, on aura

$$A_0 = \varphi_0 \sin\theta_0, \qquad B_0 = \varphi_0 \cos\theta_0.$$

Les formules précédentes peuvent donc s'écrire

$$\varphi \sin\theta = \varphi_0 \sin(\theta_0 - \alpha t) + \varphi' \sin\theta', \quad \varphi \cos\theta = \varphi_0 \cos(\theta_0 - \alpha t) + \varphi' \cos\theta'.$$

et, en ajoutant les carrés de ces deux équations, on trouve

$$\varphi^2 = \varphi_0^2 + 2\varphi_0\varphi' \cos(\theta_0 - \alpha t - \theta') + \varphi'^2.$$

Les quantités φ' et θ' variant avec le temps, on voit que l'inclinaison φ de l'orbite lunaire sur le plan fixe n'est pas constante. Mais si l'on nomme i l'inclinaison de la même orbite sur le plan de l'écliptique mobile, on aura

$$\cos i = \cos\varphi \cos\varphi' + \sin\varphi \sin\varphi' \cos(\theta - \theta'),$$

ou bien, en négligeant les produits de quatre dimensions de i, φ, φ',

$$\begin{aligned} i^2 &= \varphi^2 + \varphi'^2 - 2\varphi\varphi' \cos(\theta - \theta') \\ &= (\varphi \sin\theta - \varphi' \sin\theta')^2 + (\varphi \cos\theta - \varphi' \cos\theta')^2 = \varphi_0^2. \end{aligned}$$

On voit que l'angle i se réduit à la constante φ_0 : ainsi, au degré d'approximation dont nous nous sommes contenté, le plan de l'écliptique et celui de l'orbite lunaire se déplacent simultanément, de façon que leur inclinaison mutuelle reste constante.

Formons à présent la dérivée de la longitude moyenne l. On a

$$\frac{dl}{dt} = n + \frac{d\lambda}{dt}.$$

Si dans la valeur de $\frac{d\lambda}{dt}$ écrite ci-dessus on remplace φ^2 par

$$\varphi_0^2 + 2\varphi_0\varphi' \cos(\theta_0 - \alpha t - \theta') + \varphi'^2$$

et $\varphi\varphi' \cos(\theta - \theta')$ par

$$\varphi_0\varphi' \cos(\theta_0 - \alpha t - \theta') + \varphi'^2,$$

on trouvera que les termes en φ'^2 se détruisent, et il viendra

$$\frac{d\lambda}{dt}=\frac{n'^2\varepsilon}{n}\left[-1-\frac{9}{8}e^2+\frac{9}{8}\varphi_0^2-\frac{3}{2}e'^2-\frac{3}{8}\varphi_0\varphi'\cos(\theta_0-\alpha t-\theta')\right].$$

Nous avons donc

$$\frac{dl}{dt}=n+\frac{n'^2\varepsilon}{n}\left[-1-\frac{9}{8}e^2+\frac{9}{8}\varphi_0^2-\frac{3}{2}e'^2-\frac{3}{8}\varphi_0\varphi'\cos(\theta_0-\alpha t-\theta')\right].$$

Si la valeur de $\frac{dl}{dt}$ était constante, la longitude moyenne de la Lune croîtrait proportionnellement au temps, et il n'y aurait aucune accélération dans le mouvement de cet astre. Or les équations

$$\frac{de}{dt}=0, \qquad \frac{da}{dt}=0,$$

trouvées ci-dessus, montrent que e et a sont des constantes, et il en est de même de n, qui est lié avec a par l'équation

$$n=\sqrt{\frac{f(M+m)}{a^3}},$$

où f désigne la constante de l'attraction. Les quantités φ_0 et θ_0 sont aussi des constantes par définition, mais e', φ' et θ' varient à cause des actions perturbatrices des autres planètes sur la Terre. La longitude moyenne de la Lune contiendra donc une partie non proportionnelle au temps, savoir :

$$-\frac{3}{2}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\int e'^2dt-\frac{3}{8}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\varphi_0\int\varphi'\cos(\theta_0-\alpha t-\theta')\,dt.$$

Considérons d'abord le second terme : en effectuant l'intégration comme si φ' et θ' étaient des constantes, on le mettra sous la forme $\frac{1}{2}\varphi_0\varphi'\sin(\theta_0-\alpha t-\theta')$. C'est, comme on le voit, une quantité périodique, dont la période est sensiblement égale à la durée d'une révolution du nœud de la Lune, mais dans laquelle le coefficient du sinus croît avec le temps : toutefois, comme au bout de vingt-cinq siècles ce coefficient n'atteint pas une minute, et qu'à une époque aussi éloignée une erreur d'une minute sur

la longitude de la Lune est sans importance, nous pouvons faire abstraction du terme dont il s'agit.

Pour évaluer l'autre terme $-\frac{3}{2}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\int e'^2\,dt$, nous y remplacerons e'^2 par son développement suivant les puissances du temps; soit donc

$$e'^2 = e'^2_0 + At + Bt^2:$$

ce terme deviendra

$$-\frac{3}{2}\frac{n'^2\varepsilon}{n}e'^2_0 t - \frac{3}{4}\frac{n'^2\varepsilon}{n}At^2 - \frac{1}{2}\frac{n'^2\varepsilon}{n}Bt^3.$$

La première partie est proportionnelle au temps et se confond avec le moyen mouvement : on a donc, pour la portion de la longitude moyenne de laquelle résulte l'accélération du mouvement de la Lune, l'expression

$$-\frac{3}{4}\frac{n'^2\varepsilon}{n}A\left(1 + \frac{2}{3}\frac{B}{A}t\right)t^2.$$

Lorsqu'on remplace A et B par leurs valeurs numériques[1], le facteur entre parenthèses devient $1 + 0{,}00131\,t$, et, pour $t = -25$, il se réduit à 0,97. Ainsi le terme en t^3 provenant de la variation de e' a pour effet de diminuer des trois centièmes de sa valeur le coefficient de l'accélération relatif à l'époque des plus anciennes éclipses observées. Or ces éclipses paraissent exiger que ce coefficient soit, non pas diminué, mais au contraire à peu près doublé : l'analyse précédente ne fournit donc pas, dans la longitude moyenne de la Lune, de terme proportionnel au cube du temps qui puisse modifier notablement le coefficient de l'accélération applicable aux anciennes éclipses et faire concorder celles-ci avec la théorie.

[1] On a, d'après M. Le Verrier (*Annales de l'Observatoire*, t. IV, p. 102),

$$\frac{e'}{\sin 1''} = 3459{,}78 - 8{,}755\,t - 0{,}0282\,t^2;$$

il en résulte

$$e'^2 = 0{,}00028127 - 0{,}000001424\,t - 0{,}0000000279\,t^2,$$

et, par suite,

$$A = -0{,}000001424, \quad B = -0{,}0000000279.$$

Observons que la conclusion aurait pu être toute différente, si les termes en φ'^2 ne s'étaient pas détruits dans la valeur de $\frac{d\lambda}{dt}$ (page 12); il importe donc de chercher si cette dérivée ne contient pas de pareils termes, lorsqu'on pousse l'approximstion plus loin.

C'est ce que nous allons faire dans la suite de ce travail.

DEUXIÈME SECTION.

Nous nous proposons, dans cette section, d'intégrer les équations différentielles du mouvement de la Lune, en conservsnt seulement dans la fonction perturbatrice, avec la partie non périodique, les termes d'arguments $\theta - \theta'$ et $2\theta - 2\theta'$. On a vu ci-dessus les motifs qui nous conduisent à traiter d'abord la question ainsi simplifiée, sauf à tenir compte ensuite des parties de la fonction R que nous laissons de côté en ce moment.

Les lettres M, m, m', a, a', e, e', n, n', φ, φ', θ, θ', ϖ, ϖ', λ, λ', l, l', f, ε conservant ls signification qui leur a été attribuée dans la première section, posons de plus

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \gamma, \qquad \sin\frac{\varphi'}{2} = \gamma';$$

appelons r et r' les rayons vecteurs menés du centre de ls Terre aux centres de la Lune et du Soleil, et désignons par s le cosinus de l'angle compris entre ces deux rayons. La fonction perturbatrice relative au mouvement de ls Lune sera

$$fm'\left(\frac{rs}{r'^2} - \frac{1}{\sqrt{r'^2 - 2rr's + r^2}}\right).$$

Si l'on développe $\frac{1}{\sqrt{r'^2 - rr's + r^2}}$ suivant les puissances descendantes de r', cette expression deviendra

$$fm'\left(-\frac{1}{r'} + \frac{r^2}{r'^3}Q_1 + \frac{r^3}{r'^4}Q_2 + \frac{r^4}{r'^5}Q_3 + \frac{r^5}{r'^6}Q_4 + \frac{r^6}{r'^7}Q_5 + \cdots\right),$$

Q_1, Q_2,.... étant des polynômes entiers en s, dont voici les valeurs :

$$Q_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}s^2,$$

$$Q_2 = \frac{3}{2}s - \frac{5}{2}s^3,$$

$$Q_3 = -\frac{3}{8} + \frac{15}{4}s^2 - \frac{35}{8}s^4,$$

$$Q_4 = -\frac{15}{8}s + \frac{35}{4}s^3 - \frac{63}{8}s^5,$$

$$Q_5 = \frac{5}{16} - \frac{105}{16}s^2 + \frac{315}{16}s^4 - \frac{231}{16}s^6,$$

....

Mais la fonction perturbatrice n'entre dans les équations du problème que par ses dérivées partielles prises relativement aux éléments de la Lune; nous pouvons donc y supprimer le terme $-\frac{fm'}{r'}$, qui ne dépend pas de ces éléments, et, en désignant par R la nouvelle fonction qui résulte de cette suppression, nous aurons

$$R = fm'\left(\frac{r^2}{r'^3}Q_1 + \frac{r^3}{r'^4}Q_2 + \frac{r^4}{r'^5}Q_3 + \cdots\right)$$

ou bien

$$\frac{R}{n'^2 \varepsilon a'^3} = \frac{r^2}{r'^3}Q_1 + \frac{r^3}{r'^4}Q_2 + \frac{r^4}{r'^5}Q_3 + \cdots.$$

Si maintenant, à l'aide des formules du mouvement elliptique, on exprime à la manière ordinaire les diverses parties de R par des séries de cosinus d'angles multiples de l, ϖ, θ, l', ϖ', θ', les coefficients de ces cosinus étant des fonctions de a, e, γ, a', e', γ' développées elles-mêmes en séries suivant les puissances croissantes de e, γ, e', γ', $\frac{a}{a'}$, on aura formé ce qu'on appelle le développement de la fonction perturbatrice.

On négligera ici les parties de ce développement qui contiennent des puissances de γ' supérieures à la seconde. Si l'on observe d'ailleurs qu'un terme dont l'argument renferme $i\theta'$ a nécessairement dans son coefficient le facteur γ'^i ou le produit

de ce facteur par une puissance positive et paire de γ', on voit que la partie R_1 de la fonction perturbatrice dont nous avons besoin dans cette section se présentera sous la forme

$$R_1 = n'^2 \varepsilon a^2 \left[U + V\gamma'^2 + X\gamma' \cos(\theta - \theta') + Y\gamma'^2 \cos(2\theta - 2\theta') \right],$$

U, V, X, Y désignant des séries qui procèdent suivant les puissances de e, γ, e', $\frac{a}{a'}$.

Nous regarderons les petites quantités e, γ, e', $\sqrt{\frac{a}{a'}}$ comme étant du premier degré [1], et nous conviendrons d'indiquer par la notation (k) une quantité quelconque du degré k. Alors les valeurs de U, V, X, Y seront données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
U = & -\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{2}\gamma^2 - \tfrac{3}{8}e^2 - \tfrac{3}{8}e'^2 - \tfrac{3}{2}\gamma^4 + \tfrac{9}{4}e^2\gamma^2 + \tfrac{9}{4}e'^2\gamma^2 - \tfrac{9}{16}e^2e'^2 - \tfrac{15}{32}e'^4 \\
& - \tfrac{9}{64}\tfrac{a^2}{a'^2} - \tfrac{9}{4}e^2\gamma^4 - \tfrac{9}{4}e'^2\gamma^4 + \tfrac{27}{8}e^2e'^2\gamma^2 + \tfrac{45}{16}e'^4\gamma^2 - \tfrac{45}{64}e^2e'^4 - \tfrac{35}{64}e'^6 \\
& + \tfrac{45}{16}\tfrac{a^2}{a'^2}\gamma^2 - \tfrac{45}{64}\tfrac{a^2}{a'^2}e^2 - \tfrac{45}{64}\tfrac{a^2}{a'^2}e'^2 - \tfrac{27}{8}e^2e'^2\gamma^4 - \tfrac{45}{16}e'^4\gamma^4 + \tfrac{135}{32}e^2e'^4\gamma^2 \\
& + \tfrac{105}{32}e'^6\gamma^2 - \tfrac{105}{128}e^2e'^6 - \tfrac{315}{512}e'^8 - \tfrac{405}{32}\tfrac{a^2}{a'^2}\gamma^4 + \tfrac{225}{16}\tfrac{a^2}{a'^2}e^2\gamma^2 + \tfrac{225}{16}\tfrac{a^2}{a'^2}e'^2\gamma^2 \\
& - \tfrac{135}{512}\tfrac{a^2}{a'^2}e^4 - \tfrac{225}{64}\tfrac{a^2}{a'^2}e^2e'^2 - \tfrac{945}{512}\tfrac{a^2}{a'^2}e'^4 - \tfrac{25}{256}\tfrac{a^4}{a'^4} + (10),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V = & +\tfrac{3}{2} - 9\gamma^2 + \tfrac{9}{4}e^2 + \tfrac{9}{4}e'^2 + 9\gamma^4 - \tfrac{27}{2}e^2\gamma^2 - \tfrac{27}{2}e'^2\gamma^2 + \tfrac{27}{8}e^2e'^2 + \tfrac{45}{16}e'^4 \\
& + \tfrac{45}{16}\tfrac{a^2}{a'^2} + \tfrac{27}{2}e^2\gamma^4 + \tfrac{27}{2}e'^2\gamma^4 - \tfrac{81}{4}e^2e'^2\gamma^2 - \tfrac{135}{8}e'^4\gamma^2 + \tfrac{135}{32}e^2e'^4 \\
& + \tfrac{105}{32}e'^6 - \tfrac{225}{4}\tfrac{a^2}{a'^2}\gamma^2 + \tfrac{225}{16}\tfrac{a^2}{a'^2}e^2 + \tfrac{225}{16}\tfrac{a^2}{a'^2}e'^2 + \tfrac{81}{4}e^2e'^2\gamma^4 + \tfrac{135}{8}e'^4\gamma^4 \\
& - \tfrac{405}{16}e^2e'^4\gamma^2 - \tfrac{315}{16}e'^6\gamma^2 + \tfrac{315}{64}e^2e'^6 + \tfrac{945}{256}e'^8 + \tfrac{2025}{8}\tfrac{a^2}{a'^2}\gamma^4 \\
& - \tfrac{1125}{4}\tfrac{a^2}{a'^2}e^2\gamma^2 - \tfrac{1125}{4}\tfrac{a^2}{a'^2}e'^2\gamma^2 + \tfrac{675}{128}\tfrac{a^2}{a'^2}e^4 + \tfrac{1125}{16}\tfrac{a^2}{a'^2}e^2e'^2 + \tfrac{4725}{128}\tfrac{a^2}{a'^2}e'^4 \\
& + \tfrac{525}{128}\tfrac{a^4}{a'^4} + (10),
\end{aligned}$$

[1] C'est pour éviter la confusion que je me sers ici du mot *degré*, au lieu du mot *ordre*, qui serait plus conforme à l'usage : ce dernier sera employé, en effet, dans une autre acception, et nous dirons qu'une grandeur est de l'ordre i, quand elle sera comparable à γ'^i.

$$X = -3\gamma + \frac{15}{2}\gamma^3 - \frac{9}{2}e^2\gamma - \frac{9}{2}e'^2\gamma - \frac{21}{8}\gamma^5 + \frac{45}{4}e^2\gamma^3 + \frac{45}{4}e'^2\gamma^3 - \frac{27}{4}e^2e'^2\gamma$$
$$- \frac{45}{8}e'^4\gamma - \frac{45}{8}\frac{a^2}{a'^2}\gamma - \frac{9}{16}\gamma^7 - \frac{63}{16}e^2\gamma^5 - \frac{63}{16}e'^2\gamma^5 + \frac{135}{8}e^2e'^2\gamma^3 + \frac{225}{16}e'^4\gamma^3$$
$$- \frac{135}{16}e^2e'^4\gamma - \frac{105}{16}e'^6\gamma + \frac{855}{16}\frac{a^2}{a'^2}\gamma^3 - \frac{225}{8}\frac{a^2}{a'^2}e^2\gamma - \frac{225}{8}\frac{a^2}{a'^2}e'^2\gamma + (9),$$

$$Y = -3\gamma^2 + 3\gamma^4 - \frac{9}{2}e^2\gamma^2 - \frac{9}{2}e'^2\gamma^2 + \frac{9}{2}e^2\gamma^4 + \frac{9}{2}e'^2\gamma^4 - \frac{27}{4}e^2e'^2\gamma^2$$
$$- \frac{45}{8}e'^4\gamma^2 - \frac{405}{16}\frac{a^2}{a'^2}\gamma^2 + \frac{27}{4}e^2e'^2\gamma^4 + \frac{45}{8}e'^4\gamma^4 - \frac{135}{16}e^2e'^4\gamma^2 - \frac{105}{16}e'^6\gamma^2$$
$$+ \frac{2295}{16}\frac{a^2}{a'^2}\gamma^4 - \frac{2025}{16}\frac{a^2}{a'^2}e^2\gamma^2 - \frac{2025}{16}\frac{a^2}{a'^2}e'^2\gamma^2 + (10).$$

Les parties non calculées de ces séries sont, comme on le voit, du dixième degré dans U, V, Y, et du neuvième dans X.

Adoptons pour éléments du mouvement elliptique de la Lune les six quantités γ, θ, e, ϖ, a, λ : les formules qui expriment les dérivées de ces éléments par rapport au temps, en fonction des dérivées partielles de R, se déduisent des équations écrites page 9, en ayant égard à la relation $\gamma = \sin\frac{\varphi}{2}$; on trouve ainsi :

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\frac{dR}{d\theta} + \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{dR}{d\varpi} + \frac{dR}{d\lambda}\right),$$
$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\frac{dR}{d\gamma},$$
$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{dR}{d\varpi} + \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\frac{dR}{d\lambda},$$
$$\frac{d\varpi}{dt} = -\frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{dR}{d\gamma} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{dR}{de},$$
$$\frac{da}{dt} = -\frac{2}{na}\frac{dR}{d\lambda},$$
$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{2}{na}\frac{dR}{da} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\frac{dR}{de} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{dR}{d\gamma}.$$

Si maintenant nous réduisons R à la fonction R_1, qui ne contient ni ϖ, ni λ, ces formules deviendront

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\frac{dR_1}{d\theta},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{4\,na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\frac{dR_1}{d\gamma},$$

$$\frac{de}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = -\frac{\gamma}{2\,na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{dR_1}{d\gamma} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{dR_1}{de},$$

$$\frac{da}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\lambda}{d} = \frac{2}{na}\frac{dR_1}{da} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\frac{dR_1}{de} - \frac{\gamma}{2\,na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{dR_1}{d\gamma},$$

et, à l'aide de ces équations, où γ' et θ' doivent être regardées comme des fonctions connues du temps, il faudra trouver les valeurs de γ, θ, e, ϖ, a, λ [1].

C'est ce que nous allons faire en développant les inconnues en séries dont les termes soient des ordres 1, 2, 3, ..., la quantité γ' étant regardée comme du premier ordre; il suffira d'ailleurs, pour notre objet, de pousser ces développements jusqu'au second ordre.

Remarquons d'abord qu'en vertu de la troisième et de la cinquième équation, a et e sont des constantes et ne doivent plus compter parmi les inconnues. Il en est de même de n, en vertu de la relation

$$n^2a^3 = f(M+m).$$

Les deux premières équations ne contiennent donc que deux inconnues γ, θ, et peuvent être traitées séparément. Si l'on négligeait γ', la première se réduirait à $\frac{d\gamma}{dt} = 0$, d'où l'on conclurait $\gamma =$ constante; alors l'autre donnerait $\frac{d\theta}{dt} =$ constante, et, par suite, $\theta =$ fonction linéaire du temps. En partant de cette solution

[1] Dans tout ce qui va suivre, e' et ϖ' seront traitées comme des constantes : nous ne nous proposons pas, en effet, de reprendre ici le calcul de la partie de l'accélération séculaire qui dépend de la déformation de l'orbite terrestre, nous en référant, à cet égard, aux travaux déjà mentionnés de MM. Adams et Delaunay.

comme d'une première approximation, on formera des valeurs plus approchées de γ et de θ, où l'approximation devra être poussée jusqu'aux quantités du second ordre. Ces valeurs étant obtenues, la quatrième et la sixième de nos équations différentielles nous donneront ϖ et λ par de simples quadratures.

Entrons maintenant dans le détail des calculs qui viennent d'être indiqués. Posons

$$\gamma' \sin \theta' = u, \qquad \gamma' \cos \theta' = v;$$

la valeur de R_1 pourra s'écrire

$$R_1 = n'^2 \varepsilon a^2 \Big\{ U + X(u \sin\theta + v \cos\theta) + V(u^2 + v^2) + 2Y\left[\tfrac{1}{2}(v^2 - u^2)\cos 2\theta + uv \sin 2\theta\right] \Big\}.$$

Mais la théorie des inégalités séculaires du mouvement des planètes donne les valeurs de u et de v développées suivant les puissances du temps : écrivons-les

$$u = At + A_1 t^2, \qquad v = Bt + B_1 t^2,$$

formules où A et B doivent être considérées comme des quantités du premier ordre, A_1 et B_1 comme des quantités du deuxième ordre [1]. On n'y a pas conservé les termes en t^3, t^4, ..., lesquels seraient respectivement du troisième, du quatrième,... ordre, par la raison que les parties de la longitude que nous cherchons sont du second ordre.

En substituant dans R_1 ces valeurs de u et de v et négligeant toujours les quantités du troisième ordre, on trouve

$$R_1 = n'^2 \varepsilon a^2 \Big\{ U + X(A \sin\theta + B\cos\theta)t + X(A_1 \sin\theta + B_1 \cos\theta)t^2 + V(A^2 + B^2)t^2 + 2Y\left[\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\cos 2\theta + AB \sin 2\theta\right] t^2 \Big\}.$$

[1] On remarquera que les lettres A et B reçoivent ici et conserveront dans le reste du Mémoire une signification différente de celles qu'elles ont reçues précédemment, soit page 10, soit encore page 13.

Les équations

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\frac{dR_1}{d\theta}, \qquad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\frac{dR_1}{d\gamma}$$

deviennent, par suite,

$$(\gamma)\left\{\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} = \frac{n'^2\varepsilon}{4n\gamma}(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\Big\{ & X(A\cos\theta - B\sin\theta)t \\ & + X(A_1\cos\theta - B_1\sin\theta)t^2 \\ & - 4Y\left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\sin 2\theta - AB\cos 2\theta\right]t^2\Big\}. \end{aligned}\right.$$

$$(\theta)\left\{\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{n'^2\varepsilon}{4n\gamma}(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\Big\{ & U' + X'(A\sin\theta + B\cos\theta)t \\ & + X'(A_1\sin\theta + B_1\cos\theta)t^2 + V'(A^2+B^2)t^2 \\ & + 2Y'\left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\cos 2\theta + AB\sin 2\theta\right]t^2\Big\}. \end{aligned}\right.$$

où il faut entendre par U', V', X', Y' les dérivées de U, V, X, Y prises par rapport à γ, sans faire varier a, a', e, e'.

Lorsqu'on néglige γ', c'est-à-dire quand on suppose nulles les quantités A, B, A_1, B_1, on a

$$\frac{d\gamma}{dt} = 0, \qquad \gamma = \gamma_0,$$

γ_0 désignant une constante, et en même temps

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{n'^2\varepsilon}{4n}(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{U'}{\gamma}\right)_0,$$

en convenant d'indiquer par l'indice zéro ce que devient une fonction de γ quand on y remplace γ par la constante γ_0 : on conclut de là, en intégrant,

$$\theta = \text{constante} - \frac{n'^2\varepsilon}{4n}(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{U'}{\gamma}\right)_0 t.$$

Représentons par θ_0 cette valeur approchée de θ et, pour approcher davantage de nos deux inconnues, posons

$$\gamma = \gamma_0 + \delta_1\gamma + \delta_2\gamma + \dots, \qquad \theta = \theta_0 + \delta_1\theta + \delta_2\theta + \dots,$$

$\delta_1\gamma$ et $\delta_1\theta$ étant du premier ordre, $\delta_2\gamma$ et $\delta_2\theta$ du deuxième, etc. Substituons ces valeurs dans les équations (γ) et (θ) et égalons séparément les quantités d'un même ordre dans les deux membres de chaque équation; si nous posons, pour abréger,

$$\mathrm{A}\cos\theta_0 - \mathrm{B}\sin\theta_0 = p, \qquad \mathrm{A}\sin\theta_0 + \mathrm{B}\cos\theta_0 = q,$$
$$\mathrm{A}_1\cos\theta_0 - \mathrm{B}_1\sin\theta_0 = p_1, \qquad \mathrm{A}_1\sin\theta_0 + \mathrm{B}_1\cos\theta_0 = q_1,$$
$$\tfrac{1}{2}(\mathrm{B}^2 - \mathrm{A}^2)\cos 2\theta_0 - \mathrm{AB}\sin 2\theta_0 = \mathrm{P},$$
$$\tfrac{1}{2}(\mathrm{B}^2 - \mathrm{A}^2)\sin 2\theta_0 - \mathrm{AB}\cos 2\theta_0 = \mathrm{Q},$$

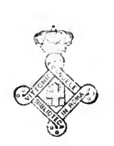
nous trouverons

$$(\gamma_1) \qquad \frac{d\delta_1\gamma}{dt} = \frac{n'^2\varepsilon}{4n}(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mathrm{X}}{\gamma}\right)_0 pt,$$

$$(\theta_1) \qquad \frac{d\delta_1\theta}{dt} = -\frac{n'^2\varepsilon}{4n}(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{d}{d\gamma}\frac{\mathrm{U}'}{\gamma}\right)_0\delta_1\gamma + \left(\frac{\mathrm{X}'}{\gamma}\right)_0 qt\right],$$

$$(\gamma_2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\delta_2\gamma}{dt} = \dfrac{n'^2\varepsilon}{4n}(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(\dfrac{d}{d\gamma}\dfrac{\mathrm{X}}{\gamma}\right)_0 pt\,\delta_1\gamma - \left(\dfrac{\mathrm{X}}{\gamma}\right)_0 qt\,\delta_1\theta \right. \\ \qquad\qquad \left. + \left(\dfrac{\mathrm{X}}{\gamma}\right)_0 p_1 t^2 - 4\left(\dfrac{\mathrm{Y}}{\gamma}\right)_0 \mathrm{Q}t^2\right], \end{cases}$$

$$(\theta_2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\delta_2\theta}{dt} = -\dfrac{n'^2\varepsilon}{4n}(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(\dfrac{d}{d\gamma}\dfrac{\mathrm{U}'}{\gamma}\right)_0\delta_2\gamma + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d^2}{d\gamma^2}\dfrac{\mathrm{U}'}{\gamma}\right)_0\delta_1\gamma^2 \right. \\ \qquad\qquad + \left(\dfrac{d}{d\gamma}\dfrac{\mathrm{X}}{\gamma}\right)_0 qt\,\delta_1\gamma + \left(\dfrac{\mathrm{X}'}{\gamma}\right)_0 pt\,\delta_1\theta \\ \qquad\qquad + \left(\dfrac{\mathrm{X}'}{\gamma}\right)_0 q_1 t^2 + \left(\dfrac{\mathrm{Y}'}{\gamma}\right)_0(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)t^2 \\ \qquad\qquad \left. + 2\left(\dfrac{\mathrm{Y}'}{\gamma}\right)_0 \mathrm{P}t^2\right]. \end{cases}$$



Observons que p et q sont des quantités du premier ordre, que p_1, q_1, P, Q sont du deuxième, et qu'on a les relations

$$p^2 = \tfrac{1}{2}(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2) - \mathrm{P}, \qquad q^2 = \tfrac{1}{2}(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2) + \mathrm{P}, \qquad pq = -\mathrm{Q};$$

ajoutons que, l'angle θ_0 étant une fonction linéaire de t, les intégrales

$$\int p\,dt,\ \int pt\,dt,\ \int pt^2dt,\ \int q\,dt,\ \int qt\,dt,\ \int qt^2dt,\ \int p_1dt,\ \int p_1t\,dt,\ \int p_1t^2dt,\ \int q_1dt,$$
$$\int q_1t\,dt,\ \int q_1t^2dt,\ \int \mathrm{P}\,dt,\ \int \mathrm{P}t\,dt,\ \int \mathrm{P}t^2dt,\ \int \mathrm{Q}\,dt,\ \int \mathrm{Q}t\,dt,\ \int \mathrm{Q}t^2dt,$$

s'obtiendront soit immédiatement, soit au moyen de l'intégration par partie.

Nous pourrons, d'après cela, trouver $\delta_1\gamma$ en intégrant l'équation (γ_1), puis substituer la valeur de $\delta_1\gamma$ dans l'équation (θ_1) et intégrer cette dernière qui nous fera connaître $\delta_1\theta$. Intégrant ensuite l'équation (γ_2) après y avoir porté les valeurs de $\delta_1\gamma$ et de $\delta_1\theta$, nous obtiendrons $\delta_2\gamma$, et, pour avoir $\delta_2\theta$, il ne restera plus qu'à intégrer l'équation (θ_2) après y avoir remplacé $\delta_1\gamma$, $\delta_1\theta$, $\delta_2\gamma$ par leurs valeurs. On trouve ainsi

$$\delta_1\gamma = -\left(\frac{X}{U'}\right)_0 qt + \frac{4n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma X}{U'^2}\right)_0 p,$$

$$\delta_1\theta = -\left(\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{d}{dy}\frac{\gamma X}{U'}\right)_0 pt - \frac{4n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{d}{dy}\frac{\gamma^2 X}{U'^2}\right)_0 q,$$

$$\begin{aligned}\delta_2\gamma = &\left(\frac{1}{4\gamma}\frac{d}{dy}\frac{\gamma X^2}{U'^2}\right)_0(A^2+B^2)t^2 - \left(\frac{X}{U'}\right)_0 q_1 t^2 + \frac{8n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma X}{U'^2}\right)_0 p_1 t\\ &+ \frac{32n^2}{n'^4\varepsilon^2}(1-e^2)\left(\frac{\gamma^2 X}{U'^3}\right)_0 q_1 - \frac{2}{U'_0}\left(\frac{X^2}{4\gamma^3}\frac{d}{dy}\frac{\gamma^3}{U'}+Y\right)_0 Pt^2\\ &- \frac{8n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma}{U'^2}\right)_0\left(\frac{X^2U'^2}{4\gamma^5}\frac{d}{dy}\frac{\gamma^5}{U'^3}+Y\right)_0 Qt\\ &+ \frac{16n^2}{n'^4\varepsilon^2}(1-e^2)\left(\frac{\gamma^2}{U'^3}\right)\left(\frac{X^2U'^2}{4\gamma^5}\frac{d}{dy}\frac{\gamma^5}{U'^3}+Y\right)_0 P,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_2\theta = &\frac{n'^2\varepsilon}{12n}(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4\gamma}\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{d}{dy}\frac{\gamma X^2}{U'}\right)-\frac{V'}{\gamma}\right]_0(A^2+B^2)t^3\\ &- \frac{n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma^2X^2}{U'^4}\frac{d^2}{dy^2}\frac{U'}{\gamma}\right)_0(A^2+B^2)t - \left(\frac{1}{\gamma}\frac{d}{dy}\frac{\gamma X}{U'}\right)_0 p_1 t^2\\ &- \frac{8n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{d}{dy}\frac{\gamma^2 X}{U'^2}\right)_0 q_1 t + \frac{32n^2}{n'^4\varepsilon^2}(1-e^2)\left(\frac{1}{\gamma}\frac{d}{dy}\frac{\gamma^2 X}{U'^3}\right)_0 p_1\\ &+ \left[\frac{1}{\gamma}\frac{d}{dy}\frac{\gamma Y}{U'}+\frac{\gamma^2X^2}{4U'^4}\frac{d}{dy}\left(\frac{U'}{\gamma^3}\frac{d}{dy}\frac{U'}{\gamma}\right)+\frac{X'^2}{2\gamma^2U'}\frac{d}{dy}\frac{\gamma^2 X}{U'X'}\right]_0 Qt^2\\ &- \frac{2n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2}{\gamma}\frac{d}{dy}\frac{\gamma^3 Y}{U'^2}+\frac{\gamma^5X^4}{2U'^8\left(\frac{d}{dy}\frac{U'}{\gamma}\right)^2}\frac{d}{dy}\frac{U'^4\left(\frac{d}{dy}\frac{U'}{\gamma}\right)^3}{\gamma^7}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{X'^2}{\gamma^4X}\frac{d}{dy}\frac{\gamma^5X^2}{U'^2X'^2}\right]_0 Pt\\ &- \frac{4n^2}{n'^4\varepsilon^2}(1-e^2)\left[\frac{2}{\gamma}\frac{d}{dy}\frac{\gamma^5 Y}{U'^3}+\frac{\gamma^{11}X^4}{2U'^{12}\left(\frac{d}{dy}\frac{U'}{\gamma}\right)^4}\frac{d}{dy}\frac{U'^7\left(\frac{d}{dy}\frac{U'}{\gamma}\right)^5}{\gamma^{12}}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{X'^2}{\gamma^3U'X}\frac{d}{dy}\frac{\gamma^5X^2}{U'^3X'^2}\right]_0 Q.\end{aligned}$$

En ajoutant à γ_0 les valeurs de $\delta_1\gamma$ et de $\delta_2\gamma$ qu'on vient d'écrire, on aura la valeur de γ. De même, en ajoutant à la valeur de θ_0, savoir :

$$\theta_0 = \text{constante} - \frac{n'^2\varepsilon}{4n}(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mathrm{U}}{\gamma}\right)_0 t,$$

les valeurs de $\delta_1\theta$ et de $\delta_2\theta$ qu'on vient d'obtenir, on aura l'expression de θ. Il reste à former celles de λ et de ϖ.

Or, en se reportant aux valeurs de $\frac{d\lambda}{dt}$ et de $\frac{d\varpi}{dt}$ (page 18), et en ayant égard à la valeur de R_1 (page 19), on voit que, si l'on pose

$$\frac{2}{a}\frac{d.a^2\mathrm{U}}{da} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{e}\frac{d\mathrm{U}}{de} - \frac{\gamma}{2\sqrt{1-e^2}}\frac{d\mathrm{U}}{d\gamma} = \Omega,$$

$$\frac{2}{a}\frac{d.a^2\mathrm{V}}{da} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{e}\frac{d\mathrm{V}}{de} - \frac{\gamma}{2\sqrt{1-e^2}}\frac{d\mathrm{V}}{d\gamma} = \Psi,$$

$$\frac{2}{a}\frac{d.a^2\mathrm{X}}{da} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{e}\frac{d\mathrm{X}}{de} - \frac{\gamma}{2\sqrt{1-e^2}}\frac{d\mathrm{X}}{d\gamma} = \Xi,$$

$$\frac{2}{a}\frac{d.a^2\mathrm{Y}}{da} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{e}\frac{d\mathrm{Y}}{de} - \frac{\gamma}{2\sqrt{1-e^2}}\frac{d\mathrm{Y}}{d\gamma} = \Upsilon,$$

$$-\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{d\mathrm{U}}{de} - \frac{\gamma}{2\sqrt{1-e^2}}\frac{d\mathrm{U}}{d\gamma} = \omega,$$

$$-\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{d\mathrm{V}}{de} - \frac{\gamma}{2\sqrt{1-e^2}}\frac{d\mathrm{V}}{d\gamma} = \psi,$$

$$-\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{d\mathrm{X}}{de} - \frac{\gamma}{2\sqrt{1-e^2}}\frac{d\mathrm{X}}{d\gamma} = \xi,$$

$$-\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{d\mathrm{Y}}{de} - \frac{\gamma}{\sqrt{1-e^2}}\frac{d\mathrm{Y}}{d\gamma} = \upsilon,$$

on aura

$$(\lambda)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{n'^2\varepsilon}{n}\Big\{&\Omega + \Xi(u\sin\theta + v\cos\theta) + \Psi(u^2+v^2) \\ &+ 2\Upsilon\left[\tfrac{1}{2}(v^2-u^2)\cos 2\theta + uv\sin 2\theta\right]\Big\}, \end{aligned}\right.$$

$$(\varpi)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\varpi}{dt} = \frac{n'^2\varepsilon}{n}\Big\{&\omega + \xi(u\sin\theta + v\cos\theta) + \psi(u^2+v^2) \\ &+ 2\upsilon\left[\tfrac{1}{2}(v^2-u^2)\cos 2\theta + uv\sin 2\theta\right]\Big\}. \end{aligned}\right.$$

Les quantités Ω, Ψ, Ξ, Υ, ω, ψ, ξ, υ sont des fonctions de γ

dont voici les valeurs :

$$\Omega = -\Big[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 + 3\gamma^4 - \frac{15}{4}e^2\gamma^2 - \frac{27}{4}e'^2\gamma^2 + \frac{3}{32}e^4$$
$$+ \frac{27}{16}e^2e'^2 + \frac{15}{8}e'^4 + \frac{9}{8}\frac{a^2}{a'^2} + \frac{3}{4}e^2\gamma^4 + \frac{9}{2}e'^2\gamma^4 + \frac{9}{8}e^4\gamma^2$$
$$- \frac{45}{8}e^2e'^2\gamma^2 - \frac{135}{16}e'^4\gamma^2 + \frac{3}{64}e^6 + \frac{9}{64}e^4e'^2 + \frac{135}{64}e^2e'^4 + \frac{35}{16}e'^6$$
$$- \frac{315}{16}\frac{a^2}{a'^2}\gamma^2 + \frac{315}{64}\frac{a^2}{a'^2}e^2 + \frac{45}{8}\frac{a^2}{a'^2}e'^2 - \frac{45}{16}e^4\gamma^4 + \frac{9}{8}e^2e'^2\gamma^4$$
$$+ \frac{45}{8}e'^4\gamma^4 + \frac{33}{32}e^6\gamma^2 + \frac{27}{16}e^4e'^2\gamma^2 - \frac{225}{32}e^2e'^4\gamma^2 - \frac{315}{32}e'^6\gamma^2$$
$$+ \frac{15}{512}e^8 + \frac{9}{128}e^6e'^2 + \frac{45}{256}e^4e'^4 + \frac{315}{128}e^2e'^6 + \frac{315}{128}e'^8$$
$$+ \frac{1215}{16}\frac{a^2}{a'^2}\gamma^4 - \frac{2655}{32}\frac{a^2}{a'^2}e^2\gamma^2 - \frac{1575}{16}\frac{a^2}{a'^2}e'^2\gamma^2$$
$$+ \frac{225}{128}\frac{a^2}{a'^2}e^4 + \frac{1575}{64}\frac{a^2}{a'^2}e^2e'^2 + \frac{945}{64}\frac{a^2}{a'^2}e'^4 + \frac{75}{64}\frac{a^4}{a'^4} + (10)\Big],$$

$$\Psi = 6\Big[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 + 3\gamma^4 - \frac{15}{4}e^2\gamma^2 - \frac{27}{4}e'^2\gamma^2 + \frac{3}{32}e^4$$
$$+ \frac{27}{16}e^2e'^2 + \frac{15}{8}e'^4 + \frac{15}{4}\frac{a^2}{a'^2} + \frac{3}{4}e^2\gamma^4 + \frac{9}{2}e'^2\gamma^4 + \frac{9}{8}e^4\gamma^2$$
$$- \frac{45}{8}e^2e'^2\gamma^2 - \frac{135}{16}e'^4\gamma^2 + \frac{3}{64}e^6 + \frac{9}{64}e^4e'^2 + \frac{135}{64}e^2e'^4 + \frac{35}{16}e'^6$$
$$- \frac{525}{8}\frac{a^2}{a'^2}\gamma^2 + \frac{525}{32}\frac{a^2}{a'^2}e^2 + \frac{75}{4}\frac{a^2}{a'^2}e'^2 - \frac{45}{16}e^4\gamma^4 + \frac{9}{8}e^2e'^2\gamma^4$$
$$+ \frac{45}{8}e'^4\gamma^4 + \frac{33}{32}e^6\gamma^2 + \frac{27}{16}e^4e'^2\gamma^2 - \frac{225}{32}e^2e'^4\gamma^2 - \frac{315}{32}e'^6\gamma^2$$
$$+ \frac{15}{512}e^8 + \frac{9}{128}e^6e'^2 + \frac{45}{256}e^4e'^4 + \frac{315}{128}e^2e'^6 + \frac{315}{128}e'^8$$
$$+ \frac{2025}{8}\frac{a^2}{a'^2}\gamma^4 - \frac{4425}{16}\frac{a^2}{a'^2}e^2\gamma^2 - \frac{2625}{8}\frac{a^2}{a'^2}e'^2\gamma^2 + \frac{375}{64}\frac{a^2}{a'^2}e^4$$
$$+ \frac{2625}{32}\frac{a^2}{a'^2}e^2e'^2 + \frac{1575}{32}\frac{a^2}{a'^2}e'^4 + \frac{525}{64}\frac{a^4}{a'^4} + (10)\Big],$$

$$\Xi = -\gamma\Big[\frac{21}{2} - \frac{75}{4}\gamma^2 + \frac{21}{2}e^2 + \frac{63}{4}e'^2 + \frac{63}{16}\gamma^4 - \frac{45}{4}e^2\gamma^2 - \frac{225}{8}e'^2\gamma^2 - \frac{9}{16}e^4$$
$$+ \frac{63}{4}e^2e'^2 + \frac{315}{16}e'^4 + \frac{675}{16}\frac{a^2}{a'^2} + \frac{9}{32}\gamma^6 - \frac{21}{16}e^2\gamma^4 + \frac{189}{32}e'^2\gamma^4$$
$$+ \frac{315}{32}e^4\gamma^2 - \frac{135}{8}e^2e'^2\gamma^2 - \frac{1125}{32}e'^4\gamma^2 - \frac{3}{4}e^6 - \frac{27}{32}e^4e'^2$$
$$+ \frac{315}{16}e^2e'^4 + \frac{735}{32}e'^6 - \frac{11115}{32}\frac{a^2}{a'^2}\gamma^2$$
$$+ \frac{5805}{32}\frac{a^2}{a'^2}e^2 + \frac{3375}{16}\frac{a^2}{a'^2}e'^2 + (8)\Big].$$

$$\Upsilon = -\gamma^2 \Big[9 - 6\gamma^2 + \tfrac{15}{2} e^2 + \tfrac{27}{2} e'^2 - \tfrac{3}{2} e^2\gamma^2 - 9\, e'^2\gamma^2 - \tfrac{9}{4} e^4 + \tfrac{45}{4} e^2 e'^2$$
$$+ \tfrac{135}{8} e'^4 + \tfrac{2835}{16} \tfrac{a^2}{a'^2} + \tfrac{45}{8} e^4 \gamma^2 - \tfrac{9}{4} e^2 e'^2 \gamma^2 - \tfrac{45}{4} e'^4 \gamma^2 - \tfrac{33}{16} e^6$$
$$- \tfrac{27}{8} e^4 e'^2 + \tfrac{225}{16} e^2 e'^4 + \tfrac{315}{16} e'^6$$
$$- \tfrac{6885}{8} \tfrac{a^2}{a'^2} \gamma^2 + \tfrac{23895}{32} \tfrac{a^2}{a'^2} e^2 + \tfrac{14175}{16} \tfrac{a^2}{a'^2} e'^2 + (8) \Big],$$

$$\omega = \tfrac{3}{4} \Big[1 - 8\gamma^2 - \tfrac{1}{2} e^2 + \tfrac{3}{2} e'^2 + 10\gamma^4 - e^2\gamma^2 - 12\, e'^2\gamma^2 - \tfrac{1}{8} e^4 - \tfrac{3}{4} e^2 e'^2$$
$$+ \tfrac{15}{8} e'^4 + \tfrac{15}{8} \tfrac{a^2}{a'^2} + 5\, e^2\gamma^4 + 15\, e'^2\gamma^4 - \tfrac{3}{2} e^4\gamma^2 - \tfrac{3}{2} e^2 e'^2 \gamma^2$$
$$- 15\, e'^4\gamma^2 - \tfrac{1}{16} e^6 - \tfrac{3}{16} e^4 e'^2 - \tfrac{15}{16} e^2 e'^4$$
$$+ \tfrac{35}{16} e'^6 - \tfrac{165}{4} \tfrac{a^2}{a'^2} \gamma^2 + \tfrac{15}{32} \tfrac{a^2}{a'^2} e^2 + \tfrac{75}{8} \tfrac{a^2}{a'^2} e'^2 + (8) \Big],$$

$$\psi = -\tfrac{9}{2} \Big[1 - 8\gamma^2 - \tfrac{1}{2} e^2 + \tfrac{3}{2} e'^2 + 10\gamma^4 - e^2\gamma^2 - 12\, e'^2\gamma^2 - \tfrac{1}{8} e^4$$
$$- \tfrac{3}{4} e^2 e'^2 + \tfrac{15}{8} e'^4 + \tfrac{25}{4} \tfrac{a^2}{a'^2} + 5\, e^2\gamma^4 + 15\, e'^2\gamma^4 - \tfrac{3}{2} e^4\gamma^2$$
$$- \tfrac{3}{2} e^2 e'^2 \gamma^2 - 15\, e'^4\gamma^2 - \tfrac{1}{16} e^6 - \tfrac{3}{16} e^4 e'^2 - \tfrac{15}{16} e^2 e'^4$$
$$+ \tfrac{35}{16} e'^6 - \tfrac{275}{2} \tfrac{a^2}{a'^2} \gamma^2 + \tfrac{25}{16} \tfrac{a^2}{a'^2} e^2 + \tfrac{125}{4} \tfrac{a^2}{a'^2} e'^2 + (8) \Big].$$

$$\xi = \gamma \Big[\tfrac{21}{2} - \tfrac{135}{4} \gamma^2 - \tfrac{3}{2} e^2 + \tfrac{63}{4} e'^2 + \tfrac{231}{16} \gamma^4 - \tfrac{45}{4} e^2 \gamma^2$$
$$- \tfrac{405}{8} e'^2 \gamma^2 + \tfrac{9}{16} e^4 - \tfrac{9}{4} e^2 e'^2 + \tfrac{315}{16} e'^4 + \tfrac{945}{16} \tfrac{a^2}{a'^2} + (6) \Big],$$

$$\upsilon = 12\gamma^2 \Big[1 - \tfrac{5}{4} \gamma^2 + \tfrac{1}{8} e^2 + \tfrac{3}{2} e'^2 - \tfrac{5}{8} e^2 \gamma^2 - \tfrac{15}{8} e'^2 \gamma^2$$
$$+ \tfrac{3}{16} e^4 + \tfrac{3}{16} e^2 e'^2 + \tfrac{15}{8} e'^4 + \tfrac{1485}{64} \tfrac{a^2}{a'^2} + (6) \Big].$$

Les dérivées de ces quantités par rapport à γ seront indiquées à l'aide d'accents, comme l'ont été ci-dessus les dérivées de U, V, X, Y.

Si maintenant, dans les premiers membres des équations (λ) et (ϖ), on remplace λ et ϖ par $\lambda_0 + \delta_1\lambda + \delta_2\lambda$, $\varpi_0 + \delta_1\varpi + \delta_2\varpi$, en sorte que λ_0 et ϖ_0 soient de l'ordre zéro, $\delta_1\lambda$ et $\delta_1\varpi$ du premier ordre, $\delta_2\lambda$ et $\delta_2\varpi$ du second; si, de plus, dans les seconds membres des mêmes équations, on remplace u par $At + A_1 t^2$, v par

$Bt+B_1t^2$, γ par $\gamma_0+\delta_1\gamma+\delta_2\gamma$, θ par $\theta_0+\delta_1\theta+\delta_2\theta$, et qu'on égale les parties du même ordre dans chaque membre, on trouvera :

$$\frac{d\lambda_0}{dt}=\frac{n'^2\varepsilon}{n}\Omega_0,$$

$$\frac{d\delta_1\lambda}{dt}=\frac{n'^2\varepsilon}{n}\left(\Omega'_0\delta_1\gamma+\Xi_0 qt\right),$$

$$\frac{d\delta_2\lambda}{dt}=\frac{n'^2\varepsilon}{n}\Big[\Omega'_0\delta_2\gamma+\tfrac{1}{2}\Omega''_0\delta_1\gamma^2+\Xi_0 q_1t^2+\Xi'_0 qt\delta_1\gamma$$
$$+\Xi_0 pt\delta_1\theta+\Psi_0(A^2+B^2)t^2+2\Upsilon_0 Pt^2\Big].$$

$$\frac{d\varpi_0}{dt}=\frac{n'^2\varepsilon}{n}\omega_0,$$

$$\frac{d\delta_1\varpi}{dt}=\frac{n'^2\varepsilon}{n}(\omega'_0\delta_1\gamma+\xi_0 qt),$$

$$\frac{d\delta_2\varpi}{dt}=\frac{n'^2\varepsilon}{n}\Big[\omega'_0\delta_2\gamma+\tfrac{1}{2}\omega''_0\delta_1\gamma^2+\xi_0 q_1t^2+\xi'_0 qt\delta_1\gamma$$
$$+\xi_0 pt\delta_1\theta+\psi_0(A^2+B^2)t^2+2\upsilon_0 Pt^2\Big].$$

Intégrons maintenant ces équations, après avoir remplacé, dans les seconds membres, $\delta_1\gamma$, $\delta_2\gamma$, $\delta_1\theta$ par leurs valeurs (page 22); il viendra

$$\lambda_0=\text{constante}+\frac{n'^2\varepsilon}{n}\Omega_0 t,$$

$$\delta_1\lambda=4(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma}{U'}\right)_0\left(\Xi-\frac{\Omega'X}{U'}\right)_0 pt$$
$$+\frac{16n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)\left(\frac{\gamma}{U'}\right)_0^2\left(\Xi-2\frac{\Omega'X}{U'}\right)_0 q.$$

$$\delta_2\lambda=\frac{n'^2\varepsilon}{12n}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma\Omega'X^2}{U'^2}-\frac{2}{\gamma}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma\Xi X}{U'}+4\Psi\right)_0(A^2+B^2)t^3$$
$$+\frac{4n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)\left(\frac{\gamma^2\Omega''X^2}{U'^4}\right)_0(A^2+B^2)t$$
$$+4(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma}{U'}\right)_0\left(\Xi-\frac{\Omega'X}{U'}\right)_0 p_1t^2$$
$$+\frac{32n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)\left(\frac{\gamma}{U'}\right)_0^2\left(\Xi-2\frac{\Omega'X}{U'}\right)_0 q_1t$$
$$-\frac{128n^3}{n'^4\varepsilon^3}(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\left(\Xi-3\frac{\Omega'X}{U'}\right)_0 p_1$$
$$-2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{2\gamma\Omega'Y}{U'^2}+\frac{\gamma^3X^2}{2U'^4}\frac{d}{d\gamma}\frac{U'\Omega'}{\gamma^2}-\frac{\gamma^2X^2}{U'^3}\frac{d}{d\gamma}\frac{\Xi U'}{\gamma X}+\frac{2\gamma}{U'}\Upsilon\right)_0 Qt^2$$

$$+\frac{8n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)\left(-\frac{4\gamma^6\Omega'\mathrm{Y}}{\mathrm{U}'^5}+\frac{\gamma^8\mathrm{X}^3}{2\mathrm{U}'^6\Omega'^2}\frac{d}{d\gamma}\frac{\mathrm{U}'^6\Omega'^2}{\gamma^7}-\frac{\gamma^6\mathrm{X}^3}{\mathrm{U}'^6\Xi}\frac{\gamma}{d\gamma}\frac{\mathrm{U}'^3\Xi^2}{\gamma^3\mathrm{X}^3}+\frac{2\gamma^4}{\mathrm{U}'^3}\Upsilon\right)_0\mathrm{P}t$$

$$+\frac{16n^3}{n'^4\varepsilon^3}(1-e)^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{6\gamma^9\Omega'\mathrm{Y}}{\mathrm{U}'^4}+\frac{\gamma^{13}\mathrm{X}^3}{2\mathrm{U}'^{12}\Omega'^4}\frac{d}{d\gamma}\frac{\mathrm{U}'^7\Omega'^3}{\gamma^{12}}-\frac{\gamma^6\mathrm{X}^3}{\mathrm{U}'^7\Xi}\frac{d}{d\gamma}\frac{\mathrm{U}'^3\Xi^3}{\gamma^3\mathrm{X}^3}\right.$$

$$\left.+\frac{2\gamma^3}{\mathrm{U}'^3}\Upsilon\right)_0\mathrm{Q}.$$

$$\varpi_0=\text{constante}+\frac{n'^2\varepsilon}{n}\omega_0 t,$$

$$\delta_1\varpi=4(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma}{\mathrm{U}'}\right)_0\left(\xi-\frac{\omega'\mathrm{X}}{\mathrm{U}'}\right)_0 pt$$

$$+\frac{16n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)\left(\frac{\gamma}{\mathrm{U}'}\right)_0^2\left(\xi-2\frac{\omega'\mathrm{X}}{\mathrm{U}'}\right)_0 q,$$

$$\delta_2\varpi=\frac{n'^2\varepsilon}{12n}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma\omega'\mathrm{X}^3}{\mathrm{U}'^3}-\frac{2}{\gamma}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma\xi\mathrm{X}}{\mathrm{U}'}+4\psi\right)_0(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)t^3$$

$$+\frac{4n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)\left(\frac{\gamma^2\omega'^2\mathrm{X}^3}{\mathrm{U}'^4}\right)_0(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)t$$

$$+4(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma}{\mathrm{U}'}\right)_0\left(\xi-\frac{\omega'\mathrm{X}}{\mathrm{U}'}\right)p_1t^2$$

$$+\frac{32n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)\left(\frac{\gamma}{\mathrm{U}'}\right)_0^2\left(\xi-2\frac{\omega'\mathrm{X}}{\mathrm{U}'}\right)_0 q_1 t$$

$$-\frac{128n^2}{n'^4\varepsilon^2}(1-e^2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\gamma}{\mathrm{U}'}\right)_0^3\left(\xi-3\frac{\omega'\mathrm{X}}{\mathrm{U}'}\right)_0 p_1$$

$$-2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{2\gamma\omega'\mathrm{Y}}{\mathrm{U}'^2}+\frac{\gamma^4\mathrm{X}^3}{2\mathrm{U}'^4}\frac{d}{d\gamma}\frac{\mathrm{U}'\omega'}{\gamma^2}-\frac{\gamma^2\mathrm{X}^3}{\mathrm{U}'^3}\frac{d}{d\gamma}\frac{\mathrm{U}'\xi}{\gamma\mathrm{X}}+\frac{2\gamma}{\mathrm{U}'}\upsilon\right)_0\mathrm{Q}t^2$$

$$+\frac{8n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)\left(-\frac{4\gamma^6\omega'\mathrm{Y}}{\mathrm{U}'^3}+\frac{\gamma^8\mathrm{X}^3}{2\mathrm{U}'^6\omega'^2}\frac{d}{d\gamma}\frac{\mathrm{U}'^6\omega'^2}{\gamma^7}\right.$$

$$\left.-\frac{\gamma^6\mathrm{X}^3}{\mathrm{U}'^6\xi}\frac{d}{d\gamma}\frac{\mathrm{U}'^3\xi^2}{\gamma^3\mathrm{X}^3}+\frac{2\gamma^4}{\mathrm{U}'^3}\upsilon\right)_0\mathrm{P}t$$

$$+\frac{16n^3}{n'^4\varepsilon^3}(1-e)^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{6\gamma^9\omega'\mathrm{Y}}{\mathrm{U}'^4}+\frac{\gamma^{13}\mathrm{X}^3}{2\mathrm{U}'^{12}\omega'^4}\frac{d}{d\gamma}\frac{\mathrm{U}'^7\omega'^3}{\gamma^{12}}-\frac{\gamma^6\mathrm{X}^3}{\mathrm{U}'^7\xi}\frac{d}{d\gamma}\frac{\mathrm{U}'^3\xi^3}{\gamma^3\mathrm{X}^3}\right.$$

$$\left.+\frac{2\gamma^3}{\mathrm{U}'^3}\upsilon\right)_0\mathrm{Q}.$$

Il reste à substituer pour U, V, X, Y, Ω, Ψ, Ξ, Υ, ω, ψ, ξ, υ leurs valeurs en fonction de γ, e, e′, $\sqrt{\frac{a}{a'}}$ (pages 16, 17, 24 et 25); faisons d'abord cette substitution dans les valeurs de $\theta_0, \lambda_0, \varpi_0$; nous obtiendrons les formules

$$\theta_0=c_1+h_0 t,\qquad \lambda_0=c_2+k_0 t,\qquad \varpi_0=c_3+j_0 t.$$

où c_1, c_2, c_3 désignent des constantes, et où l'on a

$$h_0 = -\frac{3}{4}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\Big[1 - 2\gamma_0^2 + 2e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - 4e^2\gamma_0^2 - 3e'^2\gamma_0^2 + \frac{9}{8}e^4$$
$$+ 3e^2e'^2 + \frac{15}{8}e'^4 + \frac{15}{8}\frac{n^2}{a'^2} - \frac{9}{4}e^4\gamma_0^2 - 6e^2e'^2\gamma_0^2$$
$$- \frac{15}{4}e'^4\gamma_0^2 + \frac{7}{8}e^6 + \frac{27}{16}e^4e'^2 + \frac{15}{4}e^2e'^4 + \frac{35}{16}e'^6$$
$$- \frac{135}{8}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2 + \frac{165}{16}\frac{a^2}{a'^2}e^2 + \frac{75}{8}\frac{a^2}{a'^2}e'^2 + (8)\Big],$$

$$k_0 = -\frac{n'^2\varepsilon}{n}\Big[1 - \frac{9}{2}\gamma_0^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 + 3\gamma_0^4 - \frac{15}{4}e^2\gamma_0^2 - \frac{27}{4}e'^2\gamma_0^2$$
$$+ \frac{3}{32}e^4 + \frac{27}{16}e^2e'^2 + \frac{15}{8}e'^4 + \frac{9}{8}\frac{a^2}{a'^2} + \frac{3}{4}e^2\gamma_0^1 + \frac{9}{2}e'^2\gamma_0^4$$
$$+ \frac{9}{8}e^4\gamma_0^2 - \frac{45}{8}e^2e'^2\gamma_0^2 - \frac{135}{16}e'^4\gamma_0^2 + \frac{3}{64}e^6 + \frac{9}{64}e^4e'^2$$
$$+ \frac{135}{64}e^2e'^4 + \frac{35}{16}e'^6 - \frac{315}{16}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2 + \frac{315}{64}\frac{a^2}{a'^2}e^2 + \frac{45}{8}\frac{a^2}{a'^2}e'^2$$
$$- \frac{45}{16}e^4\gamma_0^4 + \frac{9}{8}e^2e'^2\gamma_0^4 + \frac{45}{8}e'^4\gamma_0^4 + \frac{33}{32}e^6\gamma_0^2 + \frac{27}{16}e^4e'^2\gamma_0^2$$
$$- \frac{225}{32}e^2e'^4\gamma_0^2 - \frac{315}{32}e'^6\gamma_0^2 + \frac{15}{512}e^8 + \frac{9}{128}e^6e'^2$$
$$+ \frac{45}{256}e^4e'^4 + \frac{315}{128}e^2e'^6 + \frac{315}{128}e'^8 + \frac{1215}{16}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^4$$
$$- \frac{2655}{32}\frac{a^2}{a'^2}e^2\gamma_0^2 - \frac{1575}{16}\frac{a^2}{a'^2}e'^2\gamma_0^2 + \frac{225}{8}\frac{a^2}{a'^2}e^4$$
$$+ \frac{1575}{64}\frac{a^2}{a'^2}e^2e'^2 + \frac{945}{64}\frac{a^2}{a'^2}e'^4 + \frac{75}{64}\frac{a^4}{a'^4} + (10)\Big],$$

$$j_0 = \frac{3}{4}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\Big[1 - 8\gamma_0^2 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 + 10\gamma_0^4 - e^2\gamma_0^2 - 12e'^2\gamma_0^2 - \frac{1}{8}e^4$$
$$- \frac{3}{4}e^2e'^2 + \frac{15}{8}e'^4 + \frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2} + 5e^2\gamma_0^4 + 15e'^2\gamma_0^4 - \frac{3}{4}e^4\gamma_0^2$$
$$- \frac{3}{2}e^2e'^2\gamma_0^2 - 15e'^4\gamma_0^2 - \frac{1}{16}e^6 - \frac{3}{16}e^4e'^2$$
$$- \frac{15}{16}e^2e'^4 + \frac{35}{16}e'^6 - \frac{165}{4}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2 + \frac{15}{32}\frac{a^2}{a'^2}e^2 + \frac{75}{8}\frac{a^2}{a'^2}e'^2 + (8)\Big].$$

Faisons ensuite les mêmes substitutions dans $\delta_1\gamma$, $\delta_1\theta$, $\delta_1\lambda$, $\delta_1\varpi$, $\delta_2\gamma$, $\delta_2\theta$, $\delta_2\lambda$, $\delta_2\varpi$; puis rassemblons les parties qui composent

chacune de nos inconnues γ, θ, λ, ϖ, d'après les formules

$$\gamma = \gamma_0 + \delta_1 \gamma + \delta_2 \gamma,$$
$$\theta = \theta_0 + \delta_1 \theta + \delta_2 \theta,$$
$$\lambda = \lambda_0 + \delta_1 \lambda + \delta_2 \lambda,$$
$$\varpi = \varpi_0 + \delta_1 \varpi + \delta_2 \varpi;$$

les seconds membres des trois dernières formules renfermeront chacun une partie qui sera fonction linéaire du temps; nous représenterons ces trois fonctions linéaires par θ^0, λ^0, ϖ^0. On aura alors

$$\theta^0 = c_1 + h^0 t, \qquad \lambda^0 = c_2 + k^0 t, \qquad \varpi^0 = c_3 + j^0 t:$$

en faisant

$$h^0 = h_0 + \frac{4}{3}\frac{n}{n'^2\varepsilon}\Big[1 + 3\gamma_0^2 - 2e^2 - \frac{3}{2}e'^2 + 8\gamma_0^4 - 6e^2\gamma_0^2 - \frac{9}{2}e'^2\gamma_0^2$$
$$+ \frac{23}{8}e^4 + 3e^2e'^2 + \frac{3}{8}e'^4 + \frac{75}{16}\frac{a^2}{a'^2} + (6)\Big](A^2 + B^2),$$

$$k^0 = k_0 + \frac{4}{3}\frac{n}{n'^2\varepsilon}\Big[3 - 3\gamma_0^2 - \frac{19}{2}e^2 - \frac{9}{2}e'^2 - 12\gamma_0^4 + \frac{33}{2}e^2\gamma_0^2 + \frac{9}{2}e'^2\gamma_0^2$$
$$+ \frac{37}{2}e^4 + \frac{57}{4}e^2e'^2 + \frac{9}{8}e'^4 + \frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2} - 36\gamma_0^6 + 59e^2\gamma_0^4$$
$$+ 18e'^2\gamma_0^4 - \frac{153}{4}e^4\gamma_0^2 - \frac{99}{4}e^2e'^2\gamma_0^2 - \frac{9}{8}e'^4\gamma_0^2 - \frac{545}{16}e^6$$
$$- \frac{111}{4}e^4e'^2 - \frac{57}{16}e^2e'^4 + \frac{3}{16}e'^6 - \frac{1395}{8}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2 - \frac{15}{16}\frac{a^2}{a'^2}e^2$$
$$+ \frac{15}{4}\frac{a^2}{a'^2}e'^2 + (8)\Big](A^2 + B^2),$$

$$j^0 = j_0 - \frac{16}{3}\frac{n}{n'^2\varepsilon}\Big[1 - \frac{9}{2}\gamma_0^2 - \frac{31}{8}e^2 - \frac{3}{2}c'^2 - \frac{29}{2}\gamma_0^4 + \frac{117}{8}e^2\gamma_0^2 + \frac{27}{4}e'^2\gamma_0^2$$
$$+ \frac{151}{16}e^4 + \frac{93}{16}e^2e'^2 + \frac{3}{8}e'^4 + \frac{45}{32}\frac{a^2}{a'^2} + (6)\Big](A^2 + B^2).$$

Cela posé, les valeurs complètes de γ, θ, ϖ, λ seront

$$\gamma = \gamma_0 + \mathfrak{L}qt + \mathfrak{M}p + \mathfrak{N}(A^2 + B^2)t^2 + \mathfrak{L}q_1t^2 + 2\mathfrak{M}p_1t + \mathfrak{Q}q_1$$
$$+ \mathfrak{R}Pt^2 + \mathfrak{S}Qt + \mathfrak{T}P,$$

$$\theta = \theta^0 + \mathcal{L}'pt + \mathcal{M}'q + \mathcal{N}'(A^2+B^2)t^3 + \mathcal{L}'p_1t^2 + 2\mathcal{M}'q_1t + \mathcal{Q}'p_1 + \mathcal{R}'Qt^2 + \mathcal{S}'Pt + \mathcal{T}'Q,$$

$$\varpi = \varpi^0 + \mathcal{L}''pt + \mathcal{M}''q + \mathcal{N}''(A^2+B^2)t^3 + \mathcal{L}''p_1t^2 + 2\mathcal{M}''q_1t + \mathcal{Q}''p_1 + \mathcal{R}''Qt^2 + \mathcal{S}''Pt + \mathcal{T}''Q,$$

$$\lambda = \lambda^0 + \mathcal{L}'''pt + \mathcal{M}'''q + \mathcal{N}'''(A^2+B^2)t^3 + \mathcal{L}'''p_1t^2 + 2\mathcal{M}'''q_1t + \mathcal{Q}'''p_1 + \mathcal{R}'''Qt^2 + \mathcal{S}'''Pt + \mathcal{T}'''Q,$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\mathcal{L} = 1 - \tfrac{1}{2}\gamma_0^2 - \tfrac{1}{8}\gamma_0^4 - \tfrac{1}{16}\gamma_0^6 + (8),$$

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{\gamma_0}\left[1 - \tfrac{3}{2}\gamma_0^2 - \tfrac{5}{8}\gamma_0^4 - \tfrac{7}{16}\gamma_0^6 + (8)\right],$$

$$\mathcal{L}'' = -2\gamma_0\left[1 + \tfrac{1}{2}\gamma_0^2 + \tfrac{3}{8}\gamma_0^4 + (6)\right],$$

$$\mathcal{L}''' = -2\gamma_0\left[1 + \tfrac{1}{2}\gamma_0^2 + \tfrac{3}{8}\gamma_0^4 + \tfrac{5}{16}\gamma_0^6 + (8)\right],$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M} = -\frac{4}{3}\frac{n}{n'^2\varepsilon}\Big[1 &+ \tfrac{3}{2}\gamma_0^2 - 2e^2 - \tfrac{3}{2}e'^2 + \tfrac{23}{8}\gamma_0^4 - 3e^2\gamma_0^2 - \tfrac{9}{4}e'^2\gamma_0^2 \\ &+ \tfrac{23}{8}e^4 + 3e^2e'^2 + \tfrac{3}{8}e'^4 - \tfrac{15}{8}\tfrac{a^3}{a'^3} + \tfrac{91}{16}\gamma_0^6 - \tfrac{23}{4}e^2\gamma_0^4 \\ &- \tfrac{69}{16}e'^2\gamma_0^4 + \tfrac{69}{16}e^4\gamma_0^2 + \tfrac{9}{2}e^2e'^2\gamma_0^2 + \tfrac{9}{16}e'^4\gamma_0^2 - \tfrac{35}{8}e^6 \\ &- \tfrac{69}{16}e^4e'^2 - \tfrac{3}{4}e^2e'^4 + \tfrac{1}{16}e'^6 + \tfrac{165}{16}\tfrac{a^3}{a'^3}\gamma_0^2 - \tfrac{45}{16}\tfrac{a^3}{a'^3}e^2 \\ &- \tfrac{15}{4}\tfrac{a^3}{a'^3}e'^2 + (8)\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}' = \frac{4}{3}\frac{n}{n'^2\varepsilon}\frac{1}{\gamma_0}\Big[1 &+ \tfrac{9}{2}\gamma_0^2 - 2e^2 - \tfrac{3}{2}e'^2 + \tfrac{115}{8}\gamma_0^4 - 9e^2\gamma_0^2 - \tfrac{27}{4}e'^2\gamma_0^2 \\ &+ \tfrac{23}{8}e^4 + 3e^2e'^2 + \tfrac{3}{8}e'^4 - \tfrac{15}{8}\tfrac{a^3}{a'^3} + \tfrac{637}{16}\gamma_0^6 - \tfrac{115}{4}e^2\gamma_0^4 \\ &- \tfrac{345}{16}e'^2\gamma_0^4 + \tfrac{207}{16}e^4\gamma_0^2 + \tfrac{27}{2}e^2e'^2\gamma_0^2 + \tfrac{27}{16}e'^4\gamma_0^2 \\ &- \tfrac{35}{8}e^6 - \tfrac{69}{16}e^4e'^2 - \tfrac{3}{4}e^2e'^4 + \tfrac{1}{16}e'^6 + \tfrac{495}{16}\tfrac{a^3}{a'^3}\gamma_0^2 \\ &- \tfrac{45}{16}\tfrac{a^3}{a'^3}e^2 - \tfrac{15}{4}\tfrac{a^3}{a'^3}e'^2 + (8)\Big],\end{aligned}$$

$$\mathfrak{M}' = -\frac{8}{3}\frac{n}{n'^2\varepsilon}\gamma_0\Big[9+\frac{21}{2}\gamma_0^2-33e^2-\frac{27}{2}e'^2+\frac{115}{8}\gamma_0^4-\frac{87}{2}e^2\gamma_0^2$$
$$-\frac{63}{4}e'^2\gamma_0^2+\frac{627}{8}e^4+\frac{99}{2}e^2e'^2+\frac{27}{8}e'^4+\frac{75}{8}\frac{a^2}{a'^2}+(6)\Big].$$

$$\mathfrak{M}'' = \frac{8}{3}\frac{n}{n'^2\varepsilon}\gamma_0\Big[5+\frac{21}{2}\gamma_0^2-17e^2-\frac{15}{2}e'^2+\frac{307}{8}\gamma_0^4-\frac{63}{2}e^2\gamma_0^2-\frac{63}{4}e'^2\gamma_0^2$$
$$+\frac{273}{8}e^4+\frac{51}{2}e^2e'^2+\frac{15}{8}e'^4+\frac{45}{8}\frac{a^2}{a'^2}+\frac{1001}{16}\gamma_0^6$$
$$-\frac{575}{8}e^2\gamma_0^4-\frac{621}{16}e'^2\gamma_0^4+\frac{957}{16}e^4\gamma_0^2+\frac{189}{4}e^2e'^2\gamma_0^2$$
$$+\frac{63}{16}e'^4\gamma_0^2-\frac{255}{4}e^6-\frac{819}{16}e^4e'^2-\frac{51}{8}e^2e'^4+\frac{5}{16}e'^6$$
$$-\frac{165}{16}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2+\frac{15}{16}\frac{a^2}{a'^2}e^2+\frac{45}{4}\frac{a^2}{a'^2}e'^2+(8)\Big],$$

$$\mathfrak{N} = \frac{1}{4}\frac{1}{\gamma_0}\Big[1-3\gamma_0^2+(8)\Big],$$

$$\mathfrak{N} = \frac{n'^2\varepsilon}{n}(6),$$

$$\mathfrak{N}' = \frac{n'^2\varepsilon}{n}(6),$$

$$\mathfrak{N}'' = \frac{n'^2\varepsilon}{n}(8),$$

$$\mathfrak{Q} = -\frac{32}{9}\frac{n^2}{n'^4\varepsilon^2}\Big[1+\frac{7}{2}\gamma_0^2-4e^2-3e'^2+\frac{79}{8}\gamma_0^4-14e^2\gamma_0^2-\frac{21}{2}e'^2\gamma_0^2$$
$$+\frac{39}{4}e^4+12e^2e'^2+3e'^4-\frac{15}{4}\frac{a^2}{a'^2}+\frac{407}{16}\gamma_0^6-\frac{79}{2}e^2\gamma_0^4$$
$$-\frac{237}{8}e'^2\gamma_0^4+\frac{273}{8}e^4\gamma_0^2+42e^2e'^2\gamma_0^2+\frac{21}{2}e'^4\gamma_0^2-\frac{81}{4}e^6$$
$$-\frac{117}{4}e^4e'^2-12e^2e'^4-e'^6+\frac{105}{8}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2$$
$$+\frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2}e^2-\frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2}e'^2+(8)\Big],$$

$$\mathfrak{Q}' = -\frac{32}{9}\frac{n^2}{n'^4\varepsilon^2}\frac{1}{\gamma_0}\Big[1+\frac{21}{2}\gamma_0^2-4e^2-3e'^2+\frac{395}{8}\gamma_0^4-42e^2\gamma_0^2-\frac{63}{2}e'^2\gamma_0^2$$
$$+\frac{39}{4}e^4+12e^2e'^2+3e'^4-\frac{15}{4}\frac{a^2}{a'^2}+\frac{2849}{16}\gamma_0^6-\frac{395}{2}e^2\gamma_0^4$$
$$-\frac{1185}{8}e'^2\gamma_0^4+\frac{819}{8}e^4\gamma_0^2+126e^2e'^2\gamma_0^2+\frac{63}{2}e'^4\gamma_0^2$$
$$-\frac{81}{4}e^6-\frac{117}{4}e^4e'^2-12e^2e'^4-e'^6$$
$$+\frac{315}{8}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2+\frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2}e^2-\frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2}e'^2+(8)\Big].$$

$$\mathfrak{Q}'' = \frac{64}{9}\frac{n^2}{n'^4\varepsilon^2}\gamma_0\Big[17+\frac{105}{2}\gamma_0^2-98e^2-51e'^2+\frac{1027}{8}\gamma_0^4-315e^2\gamma_0^2$$
$$-\frac{315}{2}e'^2\gamma_0^2+\frac{1323}{4}e^4+294e^2e'^2$$
$$+51e'^4-\frac{45}{4}\frac{a^2}{a'^2}+(6)\Big],$$

$$\mathfrak{Q}''' = -\frac{64}{9}\frac{n^2}{n'^4\varepsilon^2}\gamma_0\Big[11+\frac{91}{2}\gamma_0^2-58e^2-33e'^2+\frac{1185}{8}\gamma_0^4-231e^2\gamma_0^2$$
$$-\frac{273}{2}e'^2\gamma_0^2+\frac{699}{4}e^4+174e^2e'^2+33e'^4-\frac{45}{4}\frac{a^2}{a'^2}$$
$$+\frac{6919}{16}\gamma_0^6-\frac{2923}{4}e^2\gamma_0^4-\frac{3555}{8}e'^2\gamma_0^4+\frac{5439}{8}e^4\gamma_0^2$$
$$+693e^2e'^2\gamma_0^2+\frac{273}{2}e'^4\gamma_0^2-\frac{1703}{4}e^6-\frac{2097}{4}e^4e'^2$$
$$-174e^2e'^4-11e'^6+\frac{525}{8}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2+\frac{135}{8}\frac{a^2}{a'^2}e^2$$
$$-\frac{45}{8}\frac{a^2}{a'^2}e'^2+(8)\Big],$$

$$\mathfrak{R} = -\frac{1}{2\gamma_0}\Big[1-\gamma_0^2+(8)\Big],$$

$$\mathfrak{R}' = \frac{1}{\gamma_0^2}\Big[1-\gamma_0^2+\gamma_0^4+\gamma_0^6+45e'^4\gamma_0^2+(8)\Big],$$

$$\mathfrak{R}'' = 2\gamma_0^2\Big[1+\gamma_0^2+(4)\Big],$$

$$\mathfrak{R}''' = 2\gamma_0^2\Big[1+\gamma_0^2+\gamma_0^4+(6)\Big],$$

$$\mathfrak{S} = -\frac{4}{3}\frac{n}{n'^2\varepsilon}\frac{1}{\gamma_0}\Big[1+5\gamma_0^2-2e^2-\frac{3}{2}e'^2+14\gamma_0^4-10e^2\gamma_0^2-\frac{15}{2}e'^2\gamma_0^2$$
$$+\frac{23}{8}e^4+3e^2e'^2+\frac{3}{8}e'^4-\frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2}+36\gamma_0^6-28e^2\gamma_0^4-21e'^2\gamma_0^4$$
$$+\frac{115}{8}e^4\gamma_0^2+15e^2e'^2\gamma_0^2+\frac{15}{8}e'^4\gamma_0^2-\frac{35}{8}e^6-\frac{69}{16}e^4e'^2$$
$$-\frac{3}{4}e^2e'^4+\frac{1}{16}e'^6+30\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2-\frac{45}{16}\frac{a^2}{a'^2}e^2-\frac{15}{4}\frac{a^2}{a'^2}e'^2+(8)\Big],$$

$$\mathfrak{S}' = -\frac{8}{3}\frac{n}{n'^2\varepsilon}\frac{1}{\gamma_0^2}\Big[1+3\gamma_0^2-2e^2-\frac{3}{2}e'^2+7\gamma_0^4-6e^2\gamma_0^2-\frac{9}{2}e'^2\gamma_0^2+\frac{23}{8}e^4$$
$$+3e^2e'^2+3e'^4-\frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2}+15\gamma_0^6-14e^2\gamma_0^4-\frac{21}{2}e'^2\gamma_0^4$$
$$+\frac{69}{8}e^4\gamma_0^2+9e^2e'^2\gamma_0^2+\frac{369}{8}e'^4\gamma_0^2-\frac{35}{8}e^6-\frac{69}{16}e^4e'^2$$
$$-\frac{33}{16}e^2e'^4+\frac{1}{16}e'^6+\frac{165}{8}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2-\frac{45}{16}\frac{a^2}{a'^2}e^2-\frac{15}{4}\frac{a^2}{a'^2}e'^2+(8)\Big],$$

$$S'' = \frac{16}{3}\frac{n}{n'^2\varepsilon}\gamma_0^2\left[1 + 5\gamma_0^2 - 2e^2 - \frac{3}{2}e'^2 + (4)\right],$$

$$S''' = \frac{16}{3}\frac{n}{n'^2\varepsilon}\gamma_0^2\left[1 + 5\gamma_0^2 - 2e^2 - \frac{3}{2}e'^2 + 17\gamma_0^4 - 10e^2\gamma_0^2 - \frac{15}{2}e'^2\gamma_0^2 \right.$$
$$\left. + \frac{23}{8}e^4 + 3e^2e'^2 + \frac{3}{8}e'^4 + \frac{45}{4}\frac{a^2}{a'^2} + (6)\right],$$

$$\mathfrak{G} = \frac{8}{9}\frac{n^2}{n'^4\varepsilon^2}\frac{1}{\gamma_0}\left[1 + 7\gamma_0^2 - 4e^2 - 3e'^2 + 28\gamma_0^4 - 28e^2\gamma_0^2 - 21e'^2\gamma_0^2 \right.$$
$$+ \frac{39}{4}e^4 + 12e^2e'^2 + 3e'^4 - \frac{15}{4}\frac{a^2}{a'^2} + 92\gamma_0^6 - 112e^2\gamma_0^4$$
$$- 84e'^2\gamma_0^4 + \frac{273}{4}e^4\gamma_0^2 + 84e^2e'^2\gamma_0^2 + 21e'^4\gamma_0^2 - \frac{81}{4}e^6$$
$$- \frac{117}{4}e^4e'^2 - 12e^2e'^4 - e'^6 + \frac{105}{4}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2 + \frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2}e^2$$
$$\left. - \frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2}e'^2 + (8)\right],$$

$$\mathfrak{G}' = -\frac{16}{9}\frac{n^2}{n'^4\varepsilon^2}\frac{1}{\gamma_0^3}\left[1 + 5\gamma_0^2 - 4e^2 - 3e'^2 + 21\gamma_0^4 - 20e^2\gamma_0^2 - 15e'^2\gamma_0^2 \right.$$
$$+ \frac{39}{4}e^4 + 12e^2e'^2 + \frac{45}{8}e'^4 - \frac{15}{4}\frac{a^2}{a'^2} + 77\gamma_0^6 - 84e^2\gamma_0^4$$
$$- 63e'^2\gamma_0^4 + \frac{195}{4}e^4\gamma_0^2 + 60e^2e'^2\gamma_0^2 + \frac{261}{4}e'^4\gamma_0^2 - \frac{81}{4}e^6$$
$$- \frac{117}{4}e^4e'^2 - \frac{297}{16}e^2e'^4 - \frac{79}{16}e'^6 + \frac{165}{8}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2 + \frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2}e^2$$
$$\left. - \frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2}e'^2 + (8)\right],$$

$$\mathfrak{G}'' = \frac{32}{9}\frac{n^2}{n'^4\varepsilon^2}\gamma_0^2\left[19 + 93\gamma_0^2 - 106e^2 - 57e'^2 + (4)\right],$$

$$\mathfrak{G}''' = -\frac{16}{9}\frac{n^2}{n'^4\varepsilon^2}\gamma_0^2\left[18 + 94\gamma_0^2 - 100e^2 - 54e'^2 + 354\gamma_0^4 - 516e^2\gamma_0^2 \right.$$
$$- 282e'^2\gamma_0^2 + \frac{621}{2}e^4 + 300e^2e'^2$$
$$\left. + 54e'^4 + \frac{405}{2}\frac{a^2}{a'^2} + (6)\right].$$

Voyons ce que nous apprennent ces formules relativement à la question qui nous occupe. La quantité n étant constante, l'équation $l = \int n\,dt + \lambda$ se réduit ici à

$$l = nt + \lambda;$$

en mettant pour λ la valeur qu'on vient de trouver, on voit que le seul terme non périodique de la longitude moyenne qui ne se confonde pas avec le moyen mouvement est le terme $\mathfrak{M}''\left(A^2+B^2\right)t^3$ ou

$$\frac{n'^2\varepsilon}{n}(8)\left(A^2+B^2\right)t^3.$$

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Lorsqu'on fait abstraction de la diminution de l'excentricité de l'orbite terrestre et qu'on réduit la fonction R à sa partie non périodique et aux termes d'arguments $\theta-\theta'$ et $2\theta-2\theta'$, le terme proportionnel au cube du temps, qu'on pourrait s'attendre à trouver dans la longitude moyenne de la Lune par suite du déplacement du plan de l'écliptique, est le produit de $\frac{n'^2\varepsilon}{n}\left(A^2+B^2\right)t^3$ par un coefficient qui, s'il n'est pas nul, est au moins du huitième degré en γ_0, e, e', $\sqrt{\frac{a}{a'}}$; par conséquent, ce terme est ou nul, ou insensible dans les limites des temps historiques[1].

La partie R_1 de la fonction perturbatrice était celle qui semblait devoir introduire dans l'accélération du mouvement de la Lune les termes les plus considérables parmi ceux qui dépendent du déplacement de l'écliptique, et l'on vient de voir, au contraire, qu'elle ne fournit que des termes nuls ou négligeables. Il nous reste à calculer les termes du même genre qu'amènera le rétablissement dans la fonction perturbatrice de la partie $R-R_1$ laissée d'abord de côté. Mais, avant d'entreprendre cette recherche, qui sera l'objet de la troisième section, nous signalerons encore quelques conséquences des formules qui précèdent.

Dans les expressions de θ et de ϖ, les termes en t^3 sont les produits de $\frac{n'^2\varepsilon}{n}\left(A^2+B^2\right)t^3$ par des facteurs qui, s'ils ne sont pas nuls, sont au moins du sixième degré. Ainsi, quand on réduit R à sa partie R_1, le déplacement de l'écliptique n'amène, ni dans

[1] Le facteur $\frac{n'^2\varepsilon}{n}(A^2+B^2)$ est égal à 0",000 000 63 environ, quand on prend le siècle pour unité de temps.

la longitude du nœud de la Lune, ni dans celle de son périgée, aucun terme sensible qui croisse comme le cube du temps.

Quant à l'élément γ, qui est le sinus de la demi-inclinaison de l'orbite lunaire sur le plan fixe, nous voyons qu'il renferme un terme séculaire dépendant du déplacement de l'écliptique, savoir :

$$\frac{1}{4\gamma_0}\left[1-3\gamma_0^2+(8)\right](A^2+B^2)t^2.$$

Il en résulte dans l'inclinaison φ elle-même un terme en t^2, qui, réduit en nombres, est à peu près $+0'',031\,t^2$.

Examinons enfin si, dans les mêmes hypothèses, l'inclinaison de l'orbite lunaire sur le plan de l'écliptique mobile est affectée de quelque inégalité non périodique. Cette inclinaison étant désignée par i, faisons

$$\sin\frac{i}{2}=\eta.$$

Le triangle sphérique déterminé par le plan fixe, le plan de l'écliptique mobile et le plan de l'orbite lunaire, nous donnera l'équation

$$\cos i=\cos\varphi\cos\varphi'+\sin\varphi\sin\varphi'\cos(\theta-\theta'),$$

ou bien

$$1-2\eta^2=(1-2\gamma^2)(1-2\gamma'^2)+4\gamma\gamma'\sqrt{1-\gamma^2}\sqrt{1-\gamma'^2}\cos(\theta-\theta'),$$

ou encore

$$\eta^2=\gamma^2+\gamma'^2-2\gamma^2\gamma'^2-2\gamma\gamma'\sqrt{1-\gamma^2}\sqrt{1-\gamma'^2}\cos(\theta-\theta').$$

Remplaçons $\gamma'\sin\theta'$ et $\gamma'\cos\theta'$ par $At+A_1t^2$ et $Bt+B_1t^2$; il nous viendra, en négligeant des quantités du troisième ordre,

$$\eta^2=\gamma^2-2\gamma\sqrt{1-\gamma^2}\,(A\sin\theta+B\cos\theta)\,t$$
$$-2\gamma\sqrt{1-\gamma^2}(A_1\sin\theta+B_1\cos\theta)\,t^2+(1-2\gamma^2)(A^2+B^2)t^2.$$

Représentons par $\gamma_0 + \Delta\gamma$ et $\theta_0 + \Delta\theta$ les valeurs de γ et de θ que donnent les formules des pages 29 et 30; observons d'ailleurs que la différence $h^0 - h_0$ étant du second ordre, θ^0 et θ_0 ne diffèrent non plus que d'une quantité de second ordre, et nous aurons, en négligeant toujours des quantités du troisième ordre,

$$\begin{aligned}
A\sin\theta + B\cos\theta &= A\sin\theta' + B\cos\theta' + (A\cos\theta' - B\sin\theta')\Delta\theta \\
&= A\sin\theta_0 + B\cos\theta_0 + (A\cos\theta_0 - B\sin\theta_0)\Delta\theta \\
&= q + p\Delta\theta,
\end{aligned}$$

$$A_1\sin\theta + B_1\cos\theta = A_1\sin\theta' + B_1\cos\theta' = A_1\sin\theta_0 + B_1\cos\theta_0 = q_1.$$

La valeur de η^2 deviendra, par suite,

$$\begin{aligned}
\eta^2 = \gamma_0^2 &+ 2\gamma_0\Delta\gamma + \Delta\gamma^2 - 2\gamma_0\sqrt{1-\gamma_0^2}\,qt - 2\gamma_0\sqrt{1-\gamma_0^2}\,pt\Delta\theta \\
&- 2\frac{1-2\gamma_0^2}{\sqrt{1-\gamma_0^2}}\,qt\,\Delta\gamma - 2\gamma_0\sqrt{1-\gamma_0^2}\,q_1t^2 + \left(1-2\gamma_0^2\right)(A^2+B^2)t^2.
\end{aligned}$$

Mais les valeurs de $\Delta\gamma$ et de $\Delta\theta$ peuvent s'écrire, d'après les formules qu'on vient de citer :

$\Delta\gamma = \mathcal{L}qt + \mathfrak{M}p + \mathfrak{N}(A^2+B^2)t^2 +$ des termes périodiques du second ordre,

$\Delta\theta = \mathcal{L}'pt + \mathfrak{M}'q +$ des termes du second ordre.

Il en résulte, aux quantités près du troisième ordre,

$$\begin{aligned}
\eta^2 = \gamma_0^2 &+ 2\gamma_0\mathcal{L}qt + 2\gamma_0\mathfrak{M}p + 2\gamma_0\mathfrak{N}(A^2+B^2)t^2 + \mathcal{L}^2q^2t^2 \\
&+ 2\mathcal{L}\mathfrak{M}pqt + \mathfrak{M}^2p^2 - 2\gamma_0\sqrt{1-\gamma_0^2}\,qt - 2\gamma_0\sqrt{1-\gamma_0^2}\,\mathcal{L}'p^2t^2 \\
&- 2\gamma_0\sqrt{1-\gamma_0^2}\,\mathfrak{M}'pqt - 2\frac{1-2\gamma_0^2}{\sqrt{1-\gamma_0^2}}\mathcal{L}q^2t^2 - 2\frac{1-2\gamma_0^2}{\sqrt{1-\gamma_0^2}}\mathfrak{M}pqt \\
&- 2\gamma_0\sqrt{1-\gamma_0^2}\,q_1t^2 + \left(1-2\gamma_0^2\right)(A^2+B^2)t^2 + \text{des termes périodiques du second ordre,}
\end{aligned}$$

ce qui, en ayant égard aux relations

$$p^2 = \tfrac{1}{2}(A^2+B^2) - P, \qquad q^2 = \tfrac{1}{2}(A^2+B^2) + P, \qquad pq = -Q,$$

peut s'écrire encore

$$\begin{aligned} n^2 = \gamma_0^2 &+ 2\gamma_0\left(\mathcal{L} - \sqrt{1-\gamma_0^2}\right) qt + 2\gamma_0 \mathcal{M} p \\ &+ \left(2\gamma_0 \mathcal{N} + \tfrac{1}{2}\mathcal{L}^2 - \gamma_0\sqrt{1-\gamma_0^2}\,\mathcal{L}' - \frac{1-2\gamma_0^2}{\sqrt{1-\gamma_0^2}}\mathcal{L} + 1 - 2\gamma_0^2\right)(A^2+B^2)t^2 \\ &+ \text{des termes du second ordre constants ou périodiques.} \end{aligned}$$

Or on a

$$\mathcal{L} = 1 - \tfrac{1}{2}\gamma_0^2 - \tfrac{1}{8}\gamma_0^4 - \tfrac{1}{16}\gamma_0^6 + (8) = \sqrt{1-\gamma_0^2} + (8),$$

$$\mathcal{N} = \frac{1}{4\gamma_0}\left[1 - 3\gamma_0^2 + (8)\right],$$

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{\gamma_0}\left[1 - \tfrac{3}{2}\gamma_0^2 - \tfrac{5}{8}\gamma_0^4 - \tfrac{7}{16}\gamma_0^6 + (8)\right],$$

d'où il suit

$$\mathcal{L} - \sqrt{1-\gamma_0^2} = (8),$$

$$2\gamma_0\mathcal{N} + \tfrac{1}{2}\mathcal{L}^2 - \gamma_0\sqrt{1-\gamma_0^2}\,\mathcal{L}' - \frac{1-2\gamma_0^2}{\sqrt{1-\gamma_0^2}}\mathcal{L} + 1 - 2\gamma_0^2 = (8).$$

Donc

$$n^2 = \gamma_0^2 + (8)\gamma_0 qt + 2\gamma_0\mathcal{M}p + (8)(A^2+B^2)t^2 + \text{des termes du second ordre constants ou périodiques,}$$

ou bien, en extrayant la racine carrée,

$$n = \gamma_0 + (8)qt + \mathcal{M}p + \frac{(8)}{\gamma_0}(A^2+B^2)t^2 + \text{des termes du second ordre constants ou périodiques.}$$

On voit que, si n renferme un terme proportionnel au carré du temps, ce terme est le produit de $(A^2+B^2)t^2$, c'est-à-dire de $0{,}000\,000\,0135\,t^2$ par un facteur qui est au moins du septième

degré. Un pareil terme, s'il existe, doit être regardé comme insensible.

La même conclusion s'étend sans peine au terme en t^2 qui pourrait exister dans la valeur de l'angle i lié à η par la formule $\sin \frac{i}{2} = \eta$.

Ainsi, et en supposant toujours la fonction perturbatrice réduite à sa partie R_1, la proposition énoncée par Laplace, que le plan de l'orbite lunaire conserve une inclinaison moyenne constante sur le plan de l'écliptique mobile, subsiste même lorsqu'on pousse l'approximation relative aux petites quantités γ_0, e, e', $\frac{a}{a'}$ beaucoup plus loin que ne le fait l'auteur de la Mécanique céleste.

TROISIÈME SECTION.

Dans la section précédente on a intégré les équations du mouvement de la Lune en réduisant la fonction perturbatrice R à la partie désignée R_1; il faut à présent tenir compte des autres termes de la fonction perturbatrice, termes dont nous désignerons la somme par R_2, en sorte qu'on ait $R = R_1 + R_2$.

Observons que les dérivées partielles $\frac{dR_1}{d\varpi}$, $\frac{dR_1}{d\lambda}$ sont nulles, et représentons par

$$\mathcal{E},\quad \mathcal{F},\quad \mathcal{G},\quad \mathfrak{I}$$

les dérivées partielles

$$\frac{dR_1}{d\gamma},\quad \frac{dR_1}{d\theta},\quad \frac{dR_1}{de},\quad \frac{dR_1}{da};$$

représentons d'ailleurs par

$$E,\quad F,\quad G,\quad H,\quad I,\quad J$$

les dérivées partielles

$$\frac{dR_2}{d\gamma},\quad \frac{dR_2}{d\theta},\quad \frac{dR_2}{de},\quad \frac{dR_2}{d\varpi},\quad \frac{dR_2}{da},\quad \frac{dR_2}{d\lambda}.$$

Alors les expressions complètes des dérivées des éléments seront données par les équations

$$
\begin{aligned}
\frac{d\gamma}{dt} &= \frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\mathcal{F} + \frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\mathrm{F} + \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}(\mathrm{H}+\mathrm{J}),\\
\frac{d\theta}{dt} &= -\frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\mathcal{E} - \frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\mathrm{E},\\
\frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\mathrm{H} + \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\mathrm{J},\\
\frac{d\varpi}{dt} &= -\frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\mathcal{E} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\mathcal{G} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\mathrm{E} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\mathrm{G}.\\
\frac{da}{dt} &= -\frac{2}{na}\mathrm{J},\\
\frac{d\lambda}{dt} &= \frac{2}{na}\mathcal{I} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\mathcal{G} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\mathcal{E},\\
&\quad + \frac{2}{na}\mathrm{I} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\mathrm{G} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\mathrm{E}.
\end{aligned}
$$

Convenons maintenant d'employer les lettres γ, θ, ϖ, λ pour représenter les valeurs de ces quatre éléments, qu'on obtient en supprimant la partie R_2 de R, valeurs qui sont données par les formules des pages 29 et 30 : désignons d'ailleurs par a et e les constantes auxquelles se réduisent, dans ce cas, le demi-grand axe et l'excentricité. Enfin, représentons par $\gamma+\delta\gamma$, $\theta+\delta\theta$, $e+\delta e$, $\varpi+\delta\varpi$, $a+\delta a$, $\lambda+\delta\lambda$ les valeurs complètes des éléments, c'est-à-dire celles qu'ils acquièrent lorsqu'on rétablit dans la fonction perturbatrice la partie R_2.

En indiquant par la caractéristique δ l'accroissement qu'éprouve une fonction quelconque de γ, θ, e, ϖ, a, λ, lorsqu'on y remplace ces éléments par $\gamma+\delta\gamma$, $\theta+\delta\theta$, $e+\delta e$, $\varpi+\delta\varpi$, $a+\delta a$, $\lambda+\delta\lambda$, nous aurons

$$
\begin{aligned}
\frac{d\delta\gamma}{dt} &= \frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\mathrm{F} + \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}(\mathrm{H}+\mathrm{J})\\
&\quad + \delta\left[\frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\mathcal{F} + \frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\mathrm{F} + \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}(\mathrm{H}+\mathrm{J})\right],\\
\frac{d\delta\theta}{dt} &= -\frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\mathrm{E} + \delta\left(-\frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\mathcal{E} - \frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\mathrm{E}\right).
\end{aligned}
$$

$$
(\mathrm{A})\left\{
\begin{aligned}
\frac{d\delta e}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\mathrm{H} + \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\mathrm{J} + \delta\Big(\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\mathrm{H} \\
&\qquad + \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\mathrm{J}\Big),\\
\frac{d\delta\varpi}{dt} &= -\frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\mathrm{E} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\mathrm{G} \\
&\quad + \delta\Big(-\frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\mathcal{E} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\mathcal{G} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\mathrm{E} \\
&\qquad - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\mathrm{G}\Big),\\
\frac{d\delta a}{dt} &= -\frac{2}{na}\mathrm{J} + \delta\Big(-\frac{2}{na}\mathrm{J}\Big),\\
\frac{d\delta\lambda}{dt} &= \frac{2}{na}\mathrm{I} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\mathrm{G} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\mathrm{E},\\
&\quad + \delta\Big(\frac{2}{na}\mathcal{J} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\mathcal{G} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\mathcal{E} + \frac{2}{na}\mathrm{I} \\
&\qquad - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\mathrm{G} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\mathrm{E}\Big).
\end{aligned}
\right.
$$

Il faut de ces équations conclure $\delta\gamma, \ldots.\ \delta\lambda$ par approximations successives. La première approximation consiste à négliger dans les seconds membres les parties affectées de la caractéristique δ. Les équations exactes (A) se réduisent alors aux équations approchées qui suivent :

$$
(\mathrm{B})\left\{
\begin{aligned}
\frac{d\delta\gamma}{dt} &= \frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\mathrm{F} + \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}(\mathrm{H}+\mathrm{J}),\\
\frac{d\delta\theta}{dt} &= -\frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\mathrm{E},\\
\frac{d\delta e}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\mathrm{H} + \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\mathrm{J},\\
\frac{d\delta\varpi}{dt} &= -\frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\mathrm{E} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\mathrm{G},\\
\frac{d\delta a}{dt} &= -\frac{2}{na}\mathrm{J},\\
\frac{d\delta\lambda}{dt} &= \frac{2}{na}\mathrm{I} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\mathrm{G} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\mathrm{E}.
\end{aligned}
\right.
$$

où les seconds membres deviennent des fonctions explicites du temps lorsqu'on y remplace γ, θ, ϖ, λ par les valeurs des pages 29 et 30, et $\gamma' \sin \theta'$, $\gamma' \cos \theta'$ par $At + A_1 t^2$, $Bt + B_1 t^2$. Pour faciliter les calculs, nous poserons

$$\Delta_1 \gamma = \mathcal{L} qt + \mathcal{M} p,$$

$$\Delta_1 \theta = \mathcal{L}' pt + \mathcal{M}' q,$$

$$\Delta_1 \varpi = \mathcal{L}'' pt + \mathcal{M}'' q,$$

$$\Delta_1 \lambda = \mathcal{L}''' pt + \mathcal{M}''' q,$$

$$\Delta_2 \gamma = \mathcal{N}(A^2+B^2)t^2 + \mathcal{L} q_1 t^2 + 2\mathcal{M} p_1 t + \mathcal{Q} q_1 + \mathcal{R} P t^2 + \mathcal{S} Q t + \mathcal{T} P,$$

$$\Delta_2 \theta = \mathcal{N}'(A^2+B^2)t^3 + \mathcal{L}' p_1 t^2 + 2\mathcal{M}' q_1 t + \mathcal{Q}' p_1 + \mathcal{R}' Q t^2 + \mathcal{S}' P t + \mathcal{T}' Q,$$

$$\Delta_2 \varpi = \mathcal{N}''(A^2+B^2)t^3 + \mathcal{L}'' p_1 t^2 + 2\mathcal{M}'' q_1 t + \mathcal{Q}'' p_1 + \mathcal{R}'' Q t^2 + \mathcal{S}'' P t + \mathcal{T}'' Q,$$

$$\Delta_2 \lambda = \mathcal{N}'''(A^2+B^2)t^3 + \mathcal{L}''' p_1 t^2 + 2\mathcal{M}''' q_1 t + \mathcal{Q}''' p_1 + \mathcal{R}''' Q t^2 + \mathcal{S}''' P t + \mathcal{T}''' Q,$$

$$\Delta \gamma = \Delta_1 \gamma + \Delta_2 \gamma,$$

$$\Delta \theta = \Delta_1 \theta + \Delta_2 \theta,$$

$$\Delta \varpi = \Delta_1 \varpi + \Delta_2 \varpi,$$

$$\Delta \lambda = \Delta_1 \lambda + \Delta_2 \lambda,$$

en sorte qu'on ait

$$\text{(C)} \qquad \gamma = \gamma_0 + \Delta\gamma, \qquad \theta = \theta' + \Delta\theta, \qquad \varpi = \varpi' + \Delta\varpi, \qquad \lambda = \lambda^0 + \Delta\lambda.$$

Observons que $\Delta_1\gamma$, $\Delta_1\theta$, $\Delta_1\varpi$, $\Delta_1\lambda$ sont des quantités du premier ordre, tandis que $\Delta_2\gamma$, $\Delta_2\theta$, $\Delta_2\varpi$, $\Delta_2\lambda$ sont du second.

Cela posé, revenons aux équations (B); lorsqu'on y aura remplacé les dérivées partielles de R_2 par leurs valeurs, le second membre de chacune d'elles deviendra une série de termes de la forme $M \,{}^{\sin}_{\cos}\, \mathcal{A}$, M étant une fonction de γ et de γ' et $\mathcal{A}$ désignant

un argument de la forme

$$\mathcal{A} = ml + m_1\varpi + m_2\theta + m'l' + m'_1\varpi' + m'_2\theta';$$

dans cette formule on a

$$l = nt + \lambda,$$

et m, m_1, m_2, m', m'_1, m'_2 désignent des nombres entiers positifs ou négatifs. Concevons maintenant que, dans chaque terme $M \frac{\sin}{\cos} \mathcal{A}$, on remplace les variables γ, θ, ϖ, λ par leurs valeurs (C), en développant le résultat suivant les puissances de $\Delta\gamma$, $\Delta\theta$, $\Delta\varpi$, $\Delta\lambda$ jusqu'aux quantités du second ordre inclusivement. Après la substitution des valeurs de $\Delta\gamma$, $\Delta\theta$, $\Delta\varpi$, $\Delta\lambda$, on voit, en ayant égard à la signification des lettres p, q, p_1, q_1, P, Q, qu'on obtiendra des termes ayant pour arguments, soit l'angle

$$\mathcal{A}^\circ = ml^\circ + m_1\varpi^\circ + m_2\theta^\circ + m'l' + m'_1\varpi' + m'_2\theta'$$

(on a $l^\circ = nt + \lambda^\circ$), soit l'un des angles

$$\mathcal{A}^\circ + \theta_\circ, \qquad \mathcal{A}^\circ - \theta_\circ, \qquad \mathcal{A}^\circ + 2\theta_\circ, \qquad \mathcal{A}^\circ - 2\theta_\circ.$$

Les coefficients de ces termes pourront d'ailleurs contenir en facteur t, ou t^2, ou t^3.

Les seconds membres des équations (B) étant maintenant composés de termes de ce genre, il suffira d'avoir égard aux relations $\gamma' \sin\theta' = At + A_1t^2$, $\gamma' \cos\theta' = Bt + B_1t^2$ pour en faire des fonctions explicites du temps. On pourra alors les intégrer et on obtiendra ainsi les portions de $\delta\gamma$, $\delta\theta$, δe, $\delta\varpi$, δa, $\delta\lambda$ qui répondent à la première approximation, portions que nous appellerons $\delta_1\gamma$, $\delta_1\theta$, $\delta_1 e$, $\delta_1\varpi$, $\delta_1 a$, $\delta_1\lambda$[1]. La valeur de $\delta_1 n$ se conclura d'ailleurs de celle de $\delta_1 a$ à l'aide de la relation

$$\delta_1 n = -\frac{3}{2}\frac{n}{a}\delta_1 a$$

[1] La caractéristique δ_1 reçoit ici une signification différente de celle qui lui a été attribuée page 20.

et $\delta_1 l$ sera donnée par la formule

$$\delta_1 l = \int \delta_1 n dt + \delta_1 \lambda.$$

Examinons d'abord si cette première approximation peut introduire dans la longitude moyenne de la Lune des termes non périodiques proportionnels au carré ou à une puissance plus élevée du temps. On voit aisément, d'après ce qui vient d'être dit et en négligeant toujours les quantités d'ordre supérieur au second, que les seuls termes de R_2 qui puissent fournir des quantités de ce genre sont ceux qui ont pour arguments $2\varpi' - 2\theta'$, $2\varpi' - \theta - \theta'$, $2\varpi' - 2\theta$. Ces termes sont, en ne gardant dans leurs coefficients que les parties du degré le moins élevé,

$$-\frac{135}{64} n'^2 \varepsilon a^2 \left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 \gamma'^2 \cos(2\varpi' - 2\theta'),$$
$$+\frac{135}{32} n'^2 \varepsilon a^2 \left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 \gamma\gamma' \cos(2\varpi' - \theta - \theta'),$$
$$-\frac{135}{64} n'^2 \varepsilon a^2 \left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 \gamma^2 \cos(2\varpi' - 2\theta).$$

Substituons-les successivement à la place de R_2 dans l'expression de $\frac{d\delta_1\lambda}{dt}$; remplaçons, comme il a été dit, γ et θ par $\gamma + \Delta_1\gamma + \Delta_2\gamma$, $\theta + \Delta_1\theta + \Delta_2\theta$, et ne conservons dans les résultats que les parties non périodiques, en négligeant toutefois les parties constantes qui se confondraient avec le moyen mouvement.

En posant, pour abréger,

$$\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\cos 2\varpi' + AB \sin 2\varpi' = A'_1,$$
$$\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\sin 2\varpi' - AB \cos 2\varpi' = B'_1,$$

en sorte que A'_1 et B'_1 soient des quantités du second ordre, nous trouverons, par le premier des termes ci-dessus,

$$\frac{d\delta_1\lambda}{dt} = -\frac{135}{4}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 A'_1 t^2;$$

par le second,

$$\frac{d\delta_1\lambda}{dt} = +\frac{405}{8}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 A'_1 t^2 + \frac{135}{2}\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 B'_1 t;$$

par le troisième,

$$\frac{d\delta_1\lambda}{dt} = -\frac{135}{8}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 A'_1 t^2 - 45\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 B'_1 t.$$

Rassemblant ces trois résultats, on voit que les termes en t^2 se détruisent et l'on trouve

$$\frac{d\delta_1\lambda}{dt} = +\frac{45}{2}\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 B'_1 t, \qquad \delta_1\lambda = +\frac{45}{4}\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 B'_1 t^2.$$

D'ailleurs, les termes de R_2 que nous considérons ne renfermant pas λ dans leurs arguments, les valeurs correspondantes de $\frac{dR_2}{d\lambda}$ sont nulles; par suite aussi celles de $\delta_1 a$ et de $\delta_1 n$. Donc, relativement à ces termes, $\delta_1 l$ se réduit à $\delta_1\lambda$, et l'on a

$$\delta_1 l = +\frac{45}{4}\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 B'_1 t^2.$$

On voit que cette inégalité a pour effet d'ajouter au coefficient de l'accélération séculaire la partie $+\frac{45}{4}\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 B'_1$; mais si l'on calcule ce nombre en prenant toujours le siècle de 36525 jours pour unité de temps, on le trouve égal à $-0'',000\,000\,000\,017$ environ; l'inégalité qu'on vient de déterminer est donc tout à fait négligeable [1].

La première approximation nous ayant fait connaître les valeurs approchées $\delta_1\gamma$, $\delta_1\theta$, $\delta_1 e$, $\delta_1\varpi$, $\delta_1 a$, $\delta_1\lambda$, $\delta_1 l$ des quantités $\delta\gamma$, $\delta\theta$, δe, $\delta\varpi$, δa, $\delta\lambda$, δl (on trouvera, p. 53 et suivantes, les valeurs de $\delta_1\gamma$, $\delta_1\theta$, etc. qui répondent à chaque terme de R_2 considéré séparément), proposons-nous maintenant d'obtenir pour δl la

[1] Les termes en t^3 qui se sont détruits quand on a réuni les trois parties de $\frac{d\delta_1\lambda}{dt}$ donneraient chacun en particulier, dans $\delta_1\lambda$, et par suite dans $\delta_1 l$, un terme en t^3: le plus grand de ces termes serait $+\frac{135}{8}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 A'_1 t^3$, ou numériquement $-0'',000\,000\,0017\, t^3$. Une pareille inégalité est encore négligeable, et par conséquent on n'a pas à craindre qu'en poussant plus loin l'approximation dans les coefficients des trois termes de R_2 qu'on vient de considérer, on obtienne dans $\delta_1 l$ des termes en t^3 ayant une influence sensible sur l'accélération séculaire.

valeur plus approchée $\delta_1 l + \delta_2 l$ [1] qui doit résulter de la seconde approximation. En représentant de même par $\delta_1 n + \delta_2 n$ et $\delta_1\lambda + \delta_2\lambda$ les valeurs de δn et de $\delta\lambda$ résultant de cette seconde approximation, on aura

$$\delta_2 l = \int \delta_2 n\, dt + \delta_2\lambda$$

et, par conséquent,

$$\frac{d\delta_2 l}{dt} = \delta_2 n + \frac{d\delta_2\lambda}{dt}.$$

Mais, lorsque n et a désignaient les valeurs complètes des éléments auxquels ces lettres se rapportent, on avait

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{n}{a}\frac{da}{dt} = \frac{3J}{a^2};$$

ces mêmes éléments étant représentés par $a+\delta a$, $n+\delta n$, on aura, en observant que n désigne maintenant une constante,

$$\frac{d\delta n}{dt} = \frac{3J}{a^2} + \delta\left(\frac{3J}{a^2}\right).$$

Or le $\delta_1 n$ correspondant à la première approximation est donné par l'équation

$$\frac{d\delta_1 n}{dt} = \frac{3J}{a^2};$$

on a donc

$$\frac{d\delta_2 n}{dt} = \delta_1\left(\frac{3J}{a^2}\right),$$

en désignant par $\delta_1\left(\frac{3J}{a^2}\right)$ l'accroissement qu'éprouve la quantité $\frac{3J}{a^2}$ lorsqu'on y remplace les éléments γ, θ, ... par $\gamma+\delta_1\gamma$, $\theta+\delta_1\theta$, ... et qu'on néglige les termes de deux dimensions ou plus en $\delta_1\gamma$, $\delta_1\theta$, ...

De même, si nous posons, pour abréger,

$$S = \frac{2}{na}(\mathfrak{J}+I) - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2 e}(\mathcal{G}+G) - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}(\mathcal{E}+E),$$

[1] La caractéristique δ_2 n'a plus ici la même signification qu'à la page 20.

nous aurons, d'après la dernière équation (A),

$$\frac{d\delta\lambda}{dt}=\frac{2}{na}\mathrm{I}-\frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\mathrm{G}-\frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\mathrm{E}+\delta\mathrm{S},$$

et comme on a

$$\frac{d\delta_1\lambda}{dt}=\frac{2}{na}\mathrm{I}-\frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\mathrm{G}-\frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\mathrm{E},$$

il en résultera

$$\frac{d\delta_2\lambda}{dt}=\delta_1\mathrm{S}.$$

Ces deux formules :

$$\frac{d\delta_2 n}{dt}=\delta_1\left(\frac{3\mathrm{J}}{a^2}\right),\qquad \frac{d\delta_2\lambda}{dt}=\delta_1\mathrm{S},$$

nous serviront à calculer les parties non périodiques de $\delta_2 n$ et de $\delta_2\lambda$, et, par suite, celles de $\delta_2 l=\int\delta_2 n\,dt+\delta_2\lambda$.

Pour effectuer commodément cette recherche, il conviendra de former d'abord les expressions générales des valeurs de $\delta_1\gamma$, $\delta_1\theta$, $\delta_1 e$, ... correspondantes à un terme quelconque de R_2 considéré isolément. On peut, en effet, chercher $\delta_1\gamma$, $\delta_1\theta$, ... en réduisant la fonction R_2 successivement à chacun de ses termes et rassemblant ensuite les résultats ainsi obtenus.

Soit donc $\mathrm{C}\cos\mathcal{A}$ un terme quelconque de cette fonction où l'on a

$$\mathcal{A}=ml+m_1\varpi+m_2\theta+m'l'+m'_1\varpi'+m'_2\theta',$$

et où C est une fonction de a, e, γ, γ'. (Nous ne mentionnons pas a' et e', qui sont traitées, ainsi que ϖ', comme des constantes absolues.) En réduisant R_2 à $\mathrm{C}\cos\mathcal{A}$, on a

$$\mathrm{E}=\frac{d\mathrm{C}}{d\gamma}\cos\mathcal{A},\qquad \mathrm{G}=\frac{d\mathrm{C}}{de}\cos\mathcal{A},\qquad \mathrm{I}=\frac{d\mathrm{C}}{da}\cos\mathcal{A},$$

$$\mathrm{F}=-m_2\mathrm{C}\sin\mathcal{A},\qquad \mathrm{H}=-m_1\mathrm{C}\sin\mathcal{A},\qquad \mathrm{J}=-m\mathrm{C}\sin\mathcal{A}.$$

Si donc on pose [1]

$$X = \left[-\frac{m_2}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}} - \frac{(m+m_1)\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}} \right] C,$$

$$Y = \left[-\frac{m_1\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} - \frac{m(\sqrt{1-e^2}-1+e^2)}{na^2 e} \right] C,$$

$$Z = \frac{2m}{na} C,$$

$$U = -\frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}} \frac{dC}{d\gamma},$$

$$V = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{dC}{de} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{dC}{d\gamma},$$

$$W = \frac{2}{na} \frac{dC}{da} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2 e} \frac{dC}{de} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{dC}{d\gamma},$$

on aura, d'après les équations (B),

$$\frac{d\delta_1\gamma}{dt} = X \sin \mathcal{A}, \qquad \frac{d\delta_1 e}{dt} = Y \sin \mathcal{A}, \qquad \frac{d\delta_1 a}{dt} = Z \sin \mathcal{A},$$

$$\frac{d\delta_1\theta}{dt} = U \cos \mathcal{A}, \qquad \frac{d\delta_1\varpi}{dt} = V \cos \mathcal{A}, \qquad \frac{d\delta_1\lambda}{dt} = W \sin \mathcal{A}.$$

Dans les seconds membres de ces équations, a, e, n sont des constantes, et γ, θ, ϖ, λ ont les valeurs données par les formules (C); on peut donc y remplacer γ par $\gamma_0 + \Delta\gamma$ et $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A}^0 + \Delta\mathcal{A}$, en faisant

$$\Delta\mathcal{A} = m\Delta\lambda + m_1\Delta\varpi + m_2\Delta\theta,$$

ou bien encore γ par $\gamma_0 + \Delta_1\gamma + \Delta_2\gamma$ et $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A}^0 + \Delta_1\mathcal{A} + \Delta_2\mathcal{A}$, en faisant

$$\Delta_1\mathcal{A} = m\Delta_1\lambda + m_1\Delta_1\varpi + m_2\Delta_1\theta, \qquad \Delta_2\mathcal{A} = m\Delta_2\lambda + m_1\Delta_2\varpi + m_2\Delta_2\theta.$$

Si l'on fait cette substitution, qu'on développe les résultats suivant les puissances de $\Delta_1\gamma$, $\Delta_2\gamma$, $\Delta_1\mathcal{A}$, $\Delta_2\mathcal{A}$, en se bornant aux

[1] Les lettres X, Y, U, V reçoivent maintenant une signification différente de celle qui leur a été attribuée page 16.

quantités du second ordre, qu'on mette pour $\Delta_1\gamma$, $\Delta_2\gamma$, $\Delta_1\mathcal{L}$, $\Delta_2\mathcal{L}$ leurs valeurs, et qu'enfin on remplace $\gamma'\sin\theta'$ par $At + A_1t^2$, $\gamma'\cos\theta'$ par $Bt + B_1t^2$, on obtiendra des sommes de termes où le temps entrera soit dans l'angle

$$\mathcal{L}^{\circ} - m_2\theta' = \left[m(n+k^{\circ}) + m_1j^{\circ} + m_2h^{\circ}\right]t + \text{const.},$$

soit dans les quantités p, q, p_1, q_1, P, Q par l'angle

$$\theta_0 = h_0t + c_1,$$

soit enfin explicitement en facteur. Ces expressions s'intégreront aisément, et l'on aura ainsi les valeurs de $\delta_1\gamma, \delta_1\theta, \delta_1e, \delta_1\varpi, \delta_1a, \delta_1\lambda$: de la valeur de δ_1a, on conclura celle de δ_1n, en la multipliant par $-\frac{3n}{2a}$, et l'on pourra calculer par suite $\int\delta_1n\,dt$. Mais avant d'écrire les formules auxquelles on parvient ainsi, il est à propos de distinguer plusieurs cas.

Soit d'abord $m_1' = 0$. Le coefficient C sera une fonction paire de γ' et nous l'écrirons $C + \bar{C}\gamma'^2$, employant ici la lettre C non surmontée d'une barre pour désigner seulement la partie indépendante de γ' : nous représenterons de même par $X + \bar{X}\gamma'^2$, $Y + \bar{Y}\gamma'^2$, $Z + \bar{Z}\gamma'^2$, $U + \bar{U}\gamma'^2$, $V + \bar{V}\gamma'^2$, $W + \bar{W}\gamma'^2$ les quantités qui ont été appelées tout à l'heure X, Y, Z, U, V, W.

Soit ensuite $m_2' = \pm 1$. Le coefficient C contiendra alors γ' en facteur, et nous l'écrirons $C\gamma'$: les quantités appelées d'abord X, Y, Z, U, V, W seront représentées ici par $X\gamma'$, $Y\gamma'$, $Z\gamma'$, $U\gamma'$, $V\gamma'$, $W\gamma'$. Nous ferons de plus

$$\mathcal{M} = ml + m_1\varpi + m_2\theta + m'l' + m_1'\varpi',$$

en sorte qu'on ait

$$\mathcal{L} = \mathcal{M} \pm \theta'$$

et nous poserons

$$\mathfrak{B}^\circ = ml^\circ + m_1\varpi^\circ + m_2\theta^\circ + m'l' + m'_1\varpi'.$$

Soit enfin $m'_1 = \pm 2$. Le coefficient C contenant alors γ'^2 en facteur, nous l'écrirons $C\gamma'^2$, et, au lieu de X, Y, Z, U, V, W, nous écrirons également $X\gamma'^2$, $Y\gamma'^2$, $Z\gamma'^2$, $U\gamma'^2$, $V\gamma'^2$, $W\gamma'^2$. Nous poserons de plus, pour ce cas,

$$b = ml + m_1\varpi + m_2\theta + m'l' + m'_1\varpi',$$

en sorte qu'on ait

$$\mathfrak{A} = b \pm 2\theta',$$

et nous ferons

$$b^\circ = ml^\circ + m_1\varpi^\circ + m_2\theta^\circ + m'l' + m'_1\varpi'.$$

Nous poserons d'ailleurs, dans ces différents cas,

$$\mathfrak{L}'' = m\mathfrak{L}''' + m_1\mathfrak{L}'' + m_2\mathfrak{L}', \qquad \mathfrak{M}'' = m\mathfrak{M}''' + m_1\mathfrak{M}'' + m_2\mathfrak{M}',$$

$$\mathfrak{N}'' = m\mathfrak{N}''' + m_1\mathfrak{N}'' + m_2\mathfrak{N}',$$

$$\mathfrak{Q}'' = m\mathfrak{Q}''' + m_1\mathfrak{Q}'' + m_2\mathfrak{Q}', \qquad \mathfrak{R}'' = m\mathfrak{R}''' + m_1\mathfrak{R}'' + m_2\mathfrak{R}',$$

$$\mathfrak{S}'' = m\mathfrak{S}''' + m_1\mathfrak{S}'' + m_2\mathfrak{S}', \qquad \mathfrak{T}'' = m\mathfrak{T}''' + m_1\mathfrak{T}'' + m_2\mathfrak{T}',$$

$$\mu = m(n + k^\circ) + m_1 j^\circ + m_2 h^\circ + m'n'.$$

Enfin l'indice zéro, placé au-dessous d'une fonction de γ, marquera toujours qu'on y remplace γ par γ_0.

Cela posé, on aura les formules suivantes :

CAS DE $m'_2 = 0$.

Terme considéré de R_2 : $(C + \bar{C}\gamma'^2)\cos\mathfrak{A}$.

Déterminons les vingt quantités K_1, K_2,..., K_{20} à l'aide des

équations

$$K_4 = \frac{1}{\mu} X_0 \mathcal{N}'',$$

$$K_3 = -\frac{1}{\mu}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{d^2X}{d\gamma^2}\right)_0 \mathcal{L}^2 + \left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{N} - \frac{1}{4} X_0 \mathcal{L}''^2 + \overline{X}_0\right] + \frac{3}{\mu} K_4,$$

$$K_2 = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 (\mathcal{L}\mathcal{M}'' + \mathcal{M}\mathcal{L}'') - \frac{2}{\mu} K_3,$$

$$K_1 = -\frac{1}{\mu}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{d^2X}{d\gamma^2}\right)_0 \mathcal{M}^2 + \frac{1}{4} X_0 \mathcal{M}''^2\right] + \frac{1}{\mu} K_2,$$

$$K_7 = \frac{1}{2(\mu - h_0)}\left[\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{L} + X_0 \mathcal{L}''\right],$$

$$K_8 = \frac{1}{2(\mu + h_0)}\left[-\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{L} + X_0 \mathcal{L}''\right],$$

$$K_5 = -\frac{1}{2(\mu + h_0)}\left[\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{M} + X_0 \mathcal{M}''\right] + \frac{1}{\mu + h_0} K_8,$$

$$K_6 = -\frac{1}{2(\mu - h_0)}\left[\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{M} - X_0 \mathcal{M}''\right] + \frac{1}{\mu - h_0} K_7,$$

$$K_{11} = 2 K_6, \qquad K_{12} = 2 K_5, \qquad K_{13} = K_7, \qquad K_{14} = K_8,$$

$$K_9 = \frac{1}{2(\mu - h_0)}\left[\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{Q} + X_0 \mathcal{Q}''\right] - \frac{1}{\mu - h_0} K_{11},$$

$$K_{10} = \frac{1}{2(\mu + h_0)}\left[-\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{Q} + X_0 \mathcal{Q}''\right] - \frac{1}{\mu + h_0} K_{12},$$

$$K_{19} = -\frac{1}{\mu + 2h_0}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{d^2X}{d\gamma^2}\right)_0 \mathcal{L}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 (\mathcal{R} - \mathcal{L}\mathcal{L}'') + \frac{1}{4} X_0 (\mathcal{L}''^2 + 2\mathcal{R}'')\right],$$

$$K_{20} = -\frac{1}{\mu - 2h_0}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{d^2X}{d\gamma^2}\right)_0 \mathcal{L}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 (\mathcal{R} + \mathcal{L}\mathcal{L}'') + \frac{1}{4} X_0 (\mathcal{L}''^2 - 2\mathcal{R}'')\right],$$

$$K_{17} = \frac{1}{\mu + 2h_0}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d^2X}{d\gamma^2}\right)_0 \mathcal{L}\mathcal{M} + \frac{1}{2}\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 (\mathcal{L}\mathcal{M}'' - \mathcal{M}\mathcal{L}'' - \mathcal{S}) + \frac{1}{2} X_0 (\mathcal{S}'' - \mathcal{L}''\mathcal{M}'')\right] - \frac{2}{\mu + 2h_0} K_{19},$$

$$K_{18} = \frac{1}{\mu - 2h_0}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2X}{d\gamma^2}\right)_0 \mathcal{L}\mathcal{M} + \frac{1}{2}\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 (\mathcal{L}\mathcal{M}'' - \mathcal{M}\mathcal{L}'' + \mathcal{S}) + \frac{1}{2} X_0 (\mathcal{S}'' + \mathcal{L}''\mathcal{M}'')\right] - \frac{2}{\mu - 2h_0} K_{20},$$

$$K_{15} = -\frac{1}{\mu + 2h_0}\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{d^2X}{d\gamma^2}\right)_0 \mathcal{M}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 (\mathcal{T} - \mathcal{M}\mathcal{M}'') + \frac{1}{4} X_0 (2\mathcal{T}'' - \mathcal{M}''^2)\right] - \frac{1}{\mu + 2h_0} K_{17},$$

$$K_{16} = -\frac{1}{\mu - 2h_0}\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{d^2X}{d\gamma^2}\right)_0 \mathcal{M}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 (\mathcal{T} + \mathcal{M}\mathcal{M}'') \; \frac{1}{4} X_0 (2\mathcal{T}'' + \mathcal{M}''^2)\right] + \frac{1}{\mu - 2h_0} K_{18}.$$

Dans ces équations remplaçons partout les lettres X et K par les lettres Y et M; elles détermineront vingt nouvelles quantités $M_1, M_2, \ldots, M_{20}$. Dans les mêmes équations remplaçons partout les lettres X et K par les lettres Z et P; elles détermineront encore vingt nouvelles quantités $P_1, P_2 \ldots, P_{20}$.

Déterminons ensuite les vingt quantités $L_1, L_2, \ldots, L_{20}$ à l'aide des équations

$$L_4 = \frac{1}{\mu} U_0 \mathfrak{N}'',$$

$$L_3 = \frac{1}{\mu}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_0 \mathfrak{L}^2 + \left(\frac{dU}{dy}\right)_0 \mathfrak{N} - \frac{1}{4} U_0 \mathfrak{L}''^2 + \overline{U}_0\right] - \frac{3}{\mu} L_4,$$

$$L_2 = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 (\mathfrak{L}\mathfrak{M}'' + \mathfrak{M}\mathfrak{L}'') + \frac{2}{\mu} L_3,$$

$$L_1 = \frac{1}{\mu}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_0 \mathfrak{M}^2 - \frac{1}{4} U_0 \mathfrak{M}''^2\right] - \frac{1}{\mu} L_2,$$

$$L_7 = \frac{1}{2(\mu - h_0)}\left[\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 \mathfrak{L} + U_0 \mathfrak{L}''\right],$$

$$L_8 = \frac{1}{2(\mu + h_0)}\left[-\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 \mathfrak{L} + U_0 \mathfrak{L}''\right],$$

$$L_5 = \frac{1}{2(\mu + h_0)}\left[\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 \mathfrak{M} + U_0 \mathfrak{M}''\right] - \frac{1}{\mu + h_0} L_8,$$

$$L_6 = \frac{1}{2(\mu - h_0)}\left[\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 \mathfrak{M} - U_0 \mathfrak{M}''\right] - \frac{1}{\mu - h_0} L_7,$$

$$L_{11} = 2L_6, \qquad L_{12} = 2L_5, \qquad L_{13} = L_7, \qquad L_{14} = L_8,$$

$$L_9 = \frac{1}{2(\mu - h_0)}\left[\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 \mathfrak{Q} + U_0 \mathfrak{Q}''\right] + \frac{1}{\mu - h_0} L_{11},$$

$$L_{10} = \frac{1}{2(\mu + h_0)}\left[-\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 \mathfrak{Q} + U_0 \mathfrak{Q}''\right] + \frac{1}{\mu + h_0} L_{12},$$

$$L_{19} = \frac{1}{\mu + 2h_0}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_0 \mathfrak{L}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 (\mathfrak{R} - \mathfrak{L}\mathfrak{L}'') + \frac{1}{4} U_0 (\mathfrak{L}''^2 + 2\mathfrak{R}'')\right],$$

$$L_{20} = \frac{1}{\mu - 2h_0}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_0 \mathfrak{L}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 (\mathfrak{R} + \mathfrak{L}\mathfrak{L}'') + \frac{1}{4} U_0 (\mathfrak{L}''^2 - 2\mathfrak{R}'')\right],$$

$$L_{17} = \frac{1}{\mu + 2h_0}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_0 \mathfrak{L}\mathfrak{M} + \frac{1}{2}\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 (\mathfrak{L}\mathfrak{M}'' - \mathfrak{M}\mathfrak{L}'' - \mathfrak{S})\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} U_0 (\mathfrak{S}'' - \mathfrak{L}''\mathfrak{M}'')\right] + \frac{2}{\mu + 2h_0} L_{19},$$

$$L_{18} = \frac{1}{\mu - 2h_0}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_0 \mathfrak{L}\mathfrak{M} + \frac{1}{2}\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 (\mathfrak{L}\mathfrak{M}'' - \mathfrak{M}\mathfrak{L}'' + \mathfrak{S})\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} U_0 (\mathfrak{S}'' + \mathfrak{L}''\mathfrak{M}'')\right] + \frac{2}{\mu - 2h_0} L_{20}.$$

$$L_{15}=\frac{1}{\mu+2h_0}\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_0\mathfrak{M}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{dU}{dy}\right)_0(\mathfrak{G}-\mathfrak{M}\mathfrak{M}'')\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}U_0(2\mathfrak{G}''-\mathfrak{M}''^2)\right]-\frac{1}{\mu+2h_0}L_{17},$$
$$L_{16}=\frac{1}{\mu-2h_0}\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_0\mathfrak{M}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{dU}{dy}\right)_0(\mathfrak{G}+\mathfrak{M}\mathfrak{M}'')\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}U_0(2\mathfrak{G}''+\mathfrak{M}''^2)\right]-\frac{1}{\mu-2h_0}L_{18}.$$

Dans ces équations remplaçons partout les lettres U et L par les lettres V et N; elles détermineront vingt nouvelles quantités $N_1, N_2, \ldots, N_{20}$. Dans les mêmes équations remplaçons partout les lettres U et L par les lettres W et Q; elles détermineront encore vingt nouvelles quantités $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{20}$.

Déterminons enfin les vingt quantités $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{20}$, à l'aide des équations

$$\Pi_1=\frac{3}{2}\frac{n}{\mu}\frac{P_1}{a}-\frac{3}{2}\frac{n}{\mu^2}\frac{P_2}{a}+3\frac{n}{\mu^3}\frac{P_3}{a}+9\frac{n}{\mu^4}\frac{P_4}{a},$$
$$\Pi_2=\frac{3}{2}\frac{n}{\mu}\frac{P_2}{a}-3\frac{n}{\mu^2}\frac{P_3}{a}-9\frac{n}{\mu^3}\frac{P_4}{a},$$
$$\Pi_3=-\frac{3}{2}\frac{n}{\mu}\frac{P_3}{a}-\frac{9}{2}\frac{n}{\mu^2}\frac{P_4}{a},$$
$$\Pi_4=\frac{3}{2}\frac{n}{\mu}\frac{P_4}{a},$$
$$\Pi_7=\frac{3}{2}\frac{n}{\mu-h_0}\frac{P_7}{a},$$
$$\Pi_8=\frac{3}{2}\frac{n}{\mu+h_0}\frac{P_8}{a},$$
$$\Pi_5=-\frac{3}{2}\frac{n}{\mu+h_0}\frac{P_5}{a}-\frac{3}{2}\frac{n}{(\mu+h_0)^2}\frac{P_8}{a},$$
$$\Pi_6=-\frac{3}{2}\frac{n}{\mu-h_0}\frac{P_6}{a}-\frac{3}{2}\frac{n}{(\mu-h_0)^2}\frac{P_7}{a},$$
$$\Pi_{11}=2\Pi_6,\qquad \Pi_{12}=2\Pi_5,\qquad \Pi_{13}=\Pi_7,\qquad \Pi_{14}=\Pi_8,$$
$$\Pi_9=\frac{3}{2}\frac{n}{\mu-h_0}\frac{P_9}{a}-\frac{3}{2}\frac{n}{(\mu-h_0)^2}\frac{P_{11}}{a}-3\frac{n}{(\mu-h_0)^3}\frac{P_{13}}{a},$$
$$\Pi_{10}=\frac{3}{2}\frac{n}{\mu+h_0}\frac{P_{10}}{a}-\frac{3}{2}\frac{n}{(\mu+h_0)^2}\frac{P_{12}}{a}-3\frac{n}{(\mu+h_0)^3}\frac{P_{14}}{a},$$
$$\Pi_{15}=-\frac{3}{2}\frac{n}{\mu+2h_0}\frac{P_{15}}{a}-\frac{3}{2}\frac{n}{(\mu+2h_0)^2}\frac{P_{17}}{a}+3\frac{n}{(\mu+2h_0)^3}\frac{P_{19}}{a},$$
$$\Pi_{16}=-\frac{3}{2}\frac{n}{\mu-2h_0}\frac{P_{16}}{a}-\frac{3}{2}\frac{n}{(\mu-2h_0)^2}\frac{P_{18}}{a}+3\frac{n}{(\mu-2h_0)^3}\frac{P_{20}}{a},$$

$$\Pi_{17} = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu+2h_0}\frac{P_{17}}{a} - 3\frac{n}{(\mu+2h_0)^2}\frac{P_{19}}{a},$$
$$\Pi_{18} = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu-2h_0}\frac{P_{18}}{a} - 3\frac{n}{(\mu-2h_0)^2}\frac{P_{20}}{a},$$
$$\Pi_{19} = -\frac{3}{2}\frac{n}{\mu+2h_0}\frac{P_{19}}{a},$$
$$\Pi_{20} = -\frac{3}{2}\frac{n}{\mu-2h_0}\frac{P_{20}}{a},$$

On aura alors

$$\begin{aligned}
\delta_1 \gamma = & \left[-\frac{1}{\mu}X_0 + K_1(A^2+B^2)\right]\cos\mathcal{L}^\circ + K_2(A^2+B^2)t\sin\mathcal{L}^\circ \\
& + K_3(A^2+B^2)t^2\cos\mathcal{L}^\circ + K_4(A^2+B^2)t^3\sin\mathcal{L}^\circ \\
& + K_5\left[A\cos(\mathcal{L}^\circ+\theta_0) - B\sin(\mathcal{L}^\circ+\theta_0)\right] \\
& + K_6\left[A\cos(\mathcal{L}^\circ-\theta_0) + B\sin(\mathcal{L}^\circ-\theta_0)\right] \\
& + K_7\left[A\sin(\mathcal{L}^\circ-\theta_0) - B\cos(\mathcal{L}^\circ-\theta_0)\right]t \\
& + K_8\left[A\sin(\mathcal{L}^\circ+\theta_0) + B\cos(\mathcal{L}^\circ+\theta_0)\right]t \\
& + K_9\left[A_1\sin(\mathcal{L}^\circ-\theta_0) - B_1\cos(\mathcal{L}^\circ-\theta_0)\right] \\
& + K_{10}\left[A_1\sin(\mathcal{L}^\circ+\theta_0) + B_1\cos(\mathcal{L}^\circ+\theta_0)\right] \\
& + K_{11}\left[A_1\cos(\mathcal{L}^\circ-\theta_0) + B_1\sin(\mathcal{L}^\circ-\theta_0)\right]t \\
& + K_{12}\left[A_1\cos(\mathcal{L}^\circ+\theta_0) - B_1\sin(\mathcal{L}^\circ+\theta_0)\right]t \\
& + K_{13}\left[A_1\sin(\mathcal{L}^\circ-\theta_0) - B_1\cos(\mathcal{L}^\circ-\theta_0)\right]t^2 \\
& + K_{14}\left[A_1\sin(\mathcal{L}^\circ+\theta_0) + B_1\cos(\mathcal{L}^\circ+\theta_0)\right]t^2 \\
& + K_{15}\left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\cos(\mathcal{L}^\circ+2\theta_0) + AB\sin(\mathcal{L}^\circ+2\theta_0)\right] \\
& + K_{16}\left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\cos(\mathcal{L}^\circ-2\theta_0) - AB\sin(\mathcal{L}^\circ-2\theta_0)\right] \\
& + K_{17}\left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\sin(\mathcal{L}^\circ+2\theta_0) - AB\cos(\mathcal{L}^\circ+2\theta_0)\right]t \\
& + K_{18}\left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\sin(\mathcal{L}^\circ-2\theta_0) + AB\cos(\mathcal{L}^\circ-2\theta_0)\right]t \\
& + K_{19}\left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\cos(\mathcal{L}^\circ+2\theta_0) + AB\sin(\mathcal{L}^\circ+2\theta_0)\right]t^2 \\
& + K_{20}\left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\cos(\mathcal{L}^\circ-2\theta_0) - AB\sin(\mathcal{L}^\circ-2\theta_0)\right]t^2.
\end{aligned}$$

Si dans le second membre de cette formule on remplace les lettres X et K par Y et M, on obtiendra la valeur de $\delta_1 e$; si l'on y remplace les lettres X et K par Z et P, on obtiendra la valeur de $\delta_1 a$. On aura ensuite

$$\begin{aligned}
\delta_1\theta = & \left[\frac{1}{\mu}U_0 + L_1(A^2+B^2)\right]\sin\mathcal{A}^\circ + L_2(A^2+B^2)t\cos\mathcal{A}^\circ \\
& + L_3(A^2+B^2)t^2\sin\mathcal{A}^\circ + L_4(A^2+B^2)t^3\cos\mathcal{A}^\circ \\
& + L_5\left[A\sin(\mathcal{A}^\circ+\theta_0) + B\cos(\mathcal{A}^\circ+\theta_0)\right] \\
& + L_6\left[A\sin(\mathcal{A}^\circ-\theta_0) - B\cos(\mathcal{A}^\circ-\theta_0)\right] \\
& + L_7\left[A\cos(\mathcal{A}^\circ-\theta_0) + B\sin(\mathcal{A}^\circ-\theta_0)\right]t \\
& + L_8\left[A\cos(\mathcal{A}^\circ+\theta_0) - B\sin(\mathcal{A}^\circ+\theta_0)\right]t \\
& + L_9\left[A_1\cos(\mathcal{A}^\circ-\theta_0) + B_1\sin(\mathcal{A}^\circ-\theta_0)\right] \\
& + L_{10}\left[A_1\cos(\mathcal{A}^\circ+\theta_0) - B_1\sin(\mathcal{A}^\circ+\theta_0)\right] \\
& + L_{11}\left[A_1\sin(\mathcal{A}^\circ-\theta_0) - B_1\cos(\mathcal{A}^\circ-\theta_0)\right]t \\
& + L_{12}\left[A_1\sin(\mathcal{A}^\circ+\theta_0) + B_1\cos(\mathcal{A}^\circ+\theta_0)\right]t \\
& + L_{13}\left[A_1\cos(\mathcal{A}^\circ-\theta_0) + B_1\sin(\mathcal{A}^\circ-\theta_0)\right]t^2 \\
& + L_{14}\left[A_1\cos(\mathcal{A}^\circ+\theta_0) - B_1\sin(\mathcal{A}^\circ+\theta_0)\right]t^2 \\
& + L_{15}\left[\frac{1}{2}(B^2-A^2)\sin(\mathcal{A}^\circ+2\theta_0) - AB\cos(\mathcal{A}^\circ+2\theta_0)\right] \\
& + L_{16}\left[\frac{1}{2}(B^2-A^2)\sin(\mathcal{A}^\circ-2\theta_0) + AB\cos(\mathcal{A}^\circ-2\theta_0)\right] \\
& + L_{17}\left[\frac{1}{2}(B^2-A^2)\cos(\mathcal{A}^\circ+2\theta_0) + AB\sin(\mathcal{A}^\circ+2\theta_0)\right]t \\
& + L_{18}\left[\frac{1}{2}(B^2-A^2)\cos(\mathcal{A}^\circ-2\theta_0) - AB\sin(\mathcal{A}^\circ-2\theta_0)\right]t \\
& + L_{19}\left[\frac{1}{2}(B^2-A^2)\sin(\mathcal{A}^\circ+2\theta_0) - AB\cos(\mathcal{A}^\circ+2\theta_0)\right]t^2 \\
& + L_{20}\left[\frac{1}{2}(B^2-A^2)\sin(\mathcal{A}^\circ-2\theta_0) + AB\cos(\mathcal{A}^\circ-2\theta_0)\right]t^2.
\end{aligned}$$

Si dans le second membre de cette formule on remplace les

lettres U et L par V et N, on obtiendra la valeur de $\delta_1\varpi$; si l'on y remplace les lettres U et L par W et Q, on obtiendra la valeur de $\delta_1\lambda$. On aura enfin

$$
\begin{aligned}
\int \delta_1 n\,dt = & \left[\frac{3}{2}\frac{n}{\mu^2}\frac{Z_0}{a} + \Pi_1 (A^2+B^2)\right] \sin \mathcal{A}^\circ + \Pi_2 (A^2+B^2) t \cos \mathcal{A}^\circ \\
& + \Pi_3 (A^2+B^2) t^2 \sin \mathcal{A}^\circ + \Pi_4 (A^2+B^2) t^3 \cos \mathcal{A}^\circ \\
& + \Pi_5 \left[A \sin(\mathcal{A}^\circ+\theta_0) + B \cos(\mathcal{A}^\circ+\theta_0)\right] \\
& + \Pi_6 \left[A \sin(\mathcal{A}^\circ-\theta_0) - B \cos(\mathcal{A}^\circ-\theta_0)\right] \\
& + \Pi_7 \left[A \cos(\mathcal{A}^\circ-\theta_0) + B \sin(\mathcal{A}^\circ-\theta_0)\right] t \\
& + \Pi_8 \left[A \cos(\mathcal{A}^\circ+\theta_0) - B \sin(\mathcal{A}^\circ+\theta_0)\right] t \\
& + \Pi_9 \left[A_1 \cos(\mathcal{A}^\circ-\theta_0) + B_1 \sin(\mathcal{A}^\circ-\theta_0)\right] \\
& + \Pi_{10} \left[A_1 \cos(\mathcal{A}^\circ+\theta_0) - B_1 \sin(\mathcal{A}^\circ+\theta_0)\right] \\
& + \Pi_{11} \left[A_1 \sin(\mathcal{A}^\circ-\theta_0) - B_1 \cos(\mathcal{A}^\circ-\theta_0)\right] t \\
& + \Pi_{12} \left[A_1 \sin(\mathcal{A}^\circ+\theta_0) + B_1 \cos(\mathcal{A}^\circ+\theta_0)\right] t \\
& + \Pi_{13} \left[A_1 \cos(\mathcal{A}^\circ-\theta_0) + B_1 \sin(\mathcal{A}^\circ-\theta_0)\right] t^2 \\
& + \Pi_{14} \left[A_1 \cos(\mathcal{A}^\circ+\theta_0) - B_1 \sin(\mathcal{A}^\circ+\theta_0)\right] t^2 \\
& + \Pi_{15} \left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2) \sin(\mathcal{A}^\circ+2\theta_0) - AB \cos(\mathcal{A}^\circ+2\theta_0)\right] \\
& + \Pi_{16} \left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2) \sin(\mathcal{A}^\circ-2\theta_0) + AB \cos(\mathcal{A}^\circ-2\theta_0)\right] \\
& + \Pi_{17} \left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2) \cos(\mathcal{A}^\circ+2\theta_0) + AB \sin(\mathcal{A}^\circ+2\theta_0)\right] t \\
& + \Pi_{18} \left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2) \cos(\mathcal{A}^\circ-2\theta_0) - AB \sin(\mathcal{A}^\circ-2\theta_0)\right] t \\
& + \Pi_{19} \left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2) \sin(\mathcal{A}^\circ+2\theta_0) - AB \cos(\mathcal{A}^\circ+2\theta_0)\right] t^2 \\
& + \Pi_{20} \left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2) \sin(\mathcal{A}^\circ-2\theta_0) + AB \cos(\mathcal{A}^\circ-2\theta_0)\right] t^2.
\end{aligned}
$$

Observons que dans ces valeurs de $\delta_1\gamma$, $\delta_1\theta$, $\int\delta_1 n\,dt$, et dans les valeurs de $\delta_1 e$, $\delta_1\varpi$, $\delta_1 a$, $\delta_1\lambda$ qui s'en déduisent, les termes

d'arguments $\mathcal{A}^\circ \pm \theta_0$ ont des coefficients du premier ordre au moins, et que les termes d'arguments $\mathcal{A}^\circ \pm 2\theta_0$ ont des coefficients du second ordre

CAS DE $m'_2 = +1$.

Terme considéré de R_2 : $C\gamma' \cos \mathcal{A} = C\gamma' \cos(\mathcal{B} + \theta')$.

Déterminons les six quantités $K_1, K_2, \ldots, K_6$ à l'aide des équations

$$K_3 = -\frac{1}{2(\mu + h_0)}\left[\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{L} - X_0 \mathcal{L}''\right],$$

$$K_2 = \frac{1}{2(\mu + h_0)}\left[\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathfrak{M} + X_0 \mathfrak{M}''\right] - \frac{2}{\mu + h_0} K_3, \qquad K_1 = \frac{1}{\mu + h_0} K_2,$$

$$K_6 = -\frac{1}{\mu - h_0}\left[\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{L} + X_0 \mathcal{L}''\right],$$

$$K_5 = \frac{1}{\mu - h_0}\left[-\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathfrak{M} + X_0 \mathfrak{M}''\right] - \frac{2}{\mu - h_0} K_6, \qquad K_4 = \frac{1}{\mu - h_0} K_5.$$

Dans ces équations remplaçons partout les lettres X et K par les lettres Y et M; elles détermineront six nouvelles quantités $M_1, M_2, \ldots, M_6$; dans les mêmes équations remplaçons partout les lettres X et K par les lettres Z et P; elles détermineront encore six nouvelles quantités $P_1, P_2, \ldots, P_6$.

Déterminons ensuite les six quantités $L_1, L_2, \ldots, L_6$ à l'aide des équations

$$L_3 = \frac{1}{2(\mu + h_0)}\left[\left(\frac{dU}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{L} - U_0 \mathcal{L}''\right],$$

$$L_2 = \frac{1}{2(\mu + h_0)}\left[\left(\frac{dU}{d\gamma}\right)_0 \mathfrak{M} + U_0 \mathfrak{M}''\right] + \frac{2}{\mu + h_0} L_3, \qquad L_1 = -\frac{1}{\mu - h_0} L_2,$$

$$L_6 = \frac{1}{\mu - h_0}\left[\left(\frac{dU}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{L} + U_0 \mathcal{L}''\right],$$

$$L_5 = \frac{1}{\mu - h_0}\left[-\left(\frac{dU}{d\gamma}\right)_0 \mathfrak{M} + U_0 \mathfrak{M}''\right] + \frac{2}{\mu - h_0} L_6, \qquad L_4 = -\frac{1}{\mu - h_0} L_5.$$

Dans ces équations remplaçons partout les lettres U et L par les lettres V et N; elles détermineront six nouvelles quantités

$N, N_1, \ldots, N_6$; dans les mêmes équations remplaçons partout les lettres U et L par les lettres W et Q; elles détermineront encore six nouvelles quantités $Q_1, Q_2, \ldots, Q_6$.

Déterminons enfin les six quantités $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_6$ à l'aide des six équations

$$\Pi_1 = -3\frac{n}{(\mu+h_0)^2}\frac{P_2}{a} + 3\frac{n}{(\mu+h_0)^3}\frac{P_3}{a}, \quad \Pi_2 = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu+h_0}\frac{P_2}{a} - 3\frac{n}{(\mu+h_0)^3}\frac{P_1}{a},$$

$$\Pi_3 = -\frac{3}{2}\frac{n}{\mu+h_0}\frac{P_3}{a}, \quad \Pi_4 = -3\frac{n}{(\mu-h_0)^2}\frac{P_5}{a} + 3\frac{n}{(\mu-h_0)^3}\frac{P_6}{a},$$

$$\Pi_5 = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu-h_0}\frac{P_5}{a} - 3\frac{n}{(\mu-h_0)^3}\frac{P_4}{a}, \quad \Pi_6 = -\frac{3}{2}\frac{n}{\mu-h_0}\frac{P_6}{a}.$$

On aura alors

$$\begin{aligned}
\delta_1\gamma = {} & \frac{1}{\mu^3}X_0(A\cos\vartheta^\circ + B\sin\vartheta^\circ) + \frac{1}{\mu}X_0(A\sin\vartheta^\circ - B\cos\vartheta^\circ)t \\
& - \frac{2}{\mu^3}X_0(A_1\sin\vartheta^\circ - B_1\cos\vartheta^\circ) + \frac{2}{\mu^2}X_0(A_1\cos\vartheta^\circ + B_1\sin\vartheta^\circ)t \\
& + \frac{1}{\mu}X_0(A_1\sin\vartheta^\circ - B_1\cos\vartheta^\circ)t^2 + K_1(A^2+B^2)\cos(\vartheta^\circ+\theta_0) \\
& + K_2(A^2+B^2)t\sin(\vartheta^\circ+\theta_0) + K_3(A^2+B^2)t^2\cos(\vartheta^\circ+\theta_0) \\
& + K_4\left[\frac{1}{2}(B^2-A^2)\cos(\vartheta^\circ-\theta_0) - AB\sin(\vartheta^\circ-\theta_0)\right] \\
& + K_5\left[\frac{1}{2}(B^2-A^2)\sin(\vartheta^\circ-\theta_0) + AB\cos(\vartheta^\circ-\theta_0)\right]t \\
& + K_6\left[\frac{1}{2}(B^2-A^2)\cos(\vartheta^\circ-\theta_0) - AB\sin(\vartheta^\circ-\theta_0)\right]t^2.
\end{aligned}$$

Si dans le second membre de cette formule on remplace les lettres X et K par Y et M, on obtiendra la valeur de $\delta_1 e$; si l'on y remplace les lettres X et K par Z et P, on obtiendra la valeur de $\delta_1 a$. On aura ensuite

$$\begin{aligned}
\delta_1\theta = {} & -\frac{1}{\mu^3}U_0(A\sin\vartheta^\circ - B\cos\vartheta^\circ) + \frac{1}{\mu}U_0(A\cos\vartheta^\circ + B\sin\vartheta^\circ)t \\
& - \frac{2}{\mu^3}U_0(A_1\cos\vartheta^\circ + B_1\sin\vartheta^\circ) \\
& - \frac{2}{\mu^2}U_0(A_1\sin\vartheta^\circ - B_1\cos\vartheta^\circ)t
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{\mu}U_0(A_1\cos\text{♑}^\circ+B_1\sin\text{♑}^\circ)t^2\\
&+L_1(A^2+B^2)\sin(\text{♑}^\circ+\theta_0)\\
&+L_2(A^2+B^2)t\cos(\text{♑}^\circ+\theta_0)\\
&+L_3(A^2+B^2)t^2\sin(\text{♑}^\circ+\theta_0)\\
&+L_4\left[\frac{1}{2}(B^2-A^2)\sin(\text{♑}^\circ-\theta_0)+AB\cos(\text{♑}^\circ-\theta_0)\right]\\
&+L_5\left[\frac{1}{2}(B^2-A^2)\cos(\text{♑}^\circ-\theta_0)-AB\sin(\text{♑}^\circ-\theta_0)\right]t\\
&+L_6\left[\frac{1}{2}(B^2-A^2)\sin(\text{♑}^\circ-\theta_0)+AB\cos(\text{♑}^\circ-\theta_0)\right]t^2.
\end{aligned}
$$

Si dans le second membre de cette formule on remplace les lettres U et L par V et N, on obtiendra la valeur de $\delta_1\varpi$; si l'on y remplace les lettres U et L par W et Q, on obtiendra la valeur de $\delta_1\lambda$. On aura enfin

$$
\begin{aligned}
\int\delta_1 n\,dt = &-3\frac{n}{\mu^2}\frac{Z_0}{a}(A\sin\text{♑}^\circ-B\cos\text{♑}^\circ)\\
&+\frac{3}{2}\frac{n}{\mu^2}\frac{Z_0}{a}(A\cos\text{♑}^\circ+B\sin\text{♑}^\circ)t\\
&-9\frac{n}{\mu^3}\frac{Z_0}{a}(A_1\cos\text{♑}^\circ+B_1\sin\text{♑}^\circ)\\
&-6\frac{n}{\mu^3}\frac{Z_0}{a}(A_1\sin\text{♑}^\circ-B_1\cos\text{♑}^\circ)t\\
&+\frac{3}{2}\frac{n}{\mu^2}\frac{Z_0}{a}(A_1\cos\text{♑}^\circ+B_1\sin\text{♑}^\circ)t^2\\
&+H_1(A^2+B^2)\sin(\text{♑}^\circ+\theta_0)\\
&+H_2(A^2+B^2)t\cos(\text{♑}^\circ+\theta_0)\\
&+H_3(A^2+B^2)t^2\sin(\text{♑}^\circ+\theta_0)\\
&+H_4\left[\frac{1}{2}(B^2-A^2)\sin(\text{♑}^\circ-\theta_0)+AB\cos(\text{♑}^\circ-\theta_0)\right]\\
&+H_5\left[\frac{1}{2}(B^2-A^2)\cos(\text{♑}^\circ-\theta_0)-AB\sin(\text{♑}^\circ-\theta_0)\right]t\\
&+H_6\left[\frac{1}{2}(B^2-A^2)\sin(\text{♑}^\circ-\theta_0)+AB\cos(\text{♑}^\circ-\theta_0)\right]t^2.
\end{aligned}
$$

Observons que, dans ces valeurs de $\delta_1\gamma$, $\delta_1\theta$, $\int\delta_1 n dt$ et dans les valeurs de $\delta_1 e$, $\delta_1\varpi$, $\delta_1 a$, $\delta_1\lambda$ qui s'en déduisent, les termes d'arguments ϑ^0 ont des coefficients du premier ordre au moins, et les termes d'arguments $\vartheta^0 \pm \theta_0$, des coefficients du second ordre.

CAS DE $m_2' = -1$.

Terme considéré de R_2 : $C\gamma' \cos \mathcal{A} = C\gamma' \cos(\vartheta - \theta')$.

Déterminons les six quantités $K_1, K_2, \ldots, K_6$ à l'aide des équations

$$K_3 = -\frac{1}{2(\mu - h_0)}\left[\left(\frac{dX}{dy}\right)_0 \mathcal{L} + X_0 \mathcal{L}''\right],$$

$$K_2 = \frac{1}{2(\mu - h_0)}\left[-\left(\frac{dX}{dy}\right)_0 \mathcal{M} + X_0 \mathcal{M}''\right] - \frac{2}{\mu - h_0} K_3, \qquad K_1 = \frac{1}{\mu - h_0} K_2,$$

$$K_6 = -\frac{1}{\mu + h_0}\left[\left(\frac{dX}{dy}\right)_0 \mathcal{L} - X_0 \mathcal{L}''\right],$$

$$K_5 = \frac{1}{\mu + h_0}\left[\left(\frac{dX}{dy}\right)_0 \mathcal{M} + X_0 \mathcal{M}''\right] - \frac{2}{\mu + h_0} K_6, \qquad K_4 = \frac{1}{\mu + h_0} K_5.$$

Dans ces équations, remplaçons partout les lettres X et K par les lettres Y et M; elles détermineront six nouvelles quantités M_1, $M_2, \ldots, M_6$. Dans les mêmes équations, remplaçons partout les lettres X et K par les lettres Z et P; elles détermineront encore six nouvelles quantités $P_1, P_2, \ldots, P_6$.

Déterminons ensuite les six quantités $L_1, L_2, \ldots, L_6$ à l'aide des équations

$$L_3 = \frac{1}{2(\mu - h_0)}\left[\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 \mathcal{L} + U_0 \mathcal{L}''\right],$$

$$L_2 = \frac{1}{2(\mu - h_0)}\left[-\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 \mathcal{M} + U_0 \mathcal{M}''\right] + \frac{2}{\mu - h_0} L_3, \qquad L_1 = -\frac{1}{\mu - h_0} L_2,$$

$$L_6 = \frac{1}{\mu + h_0}\left[\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 \mathcal{L} - U_0 \mathcal{L}''\right],$$

$$L_5 = \frac{1}{\mu + h_0}\left[\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 \mathcal{M} + U_0 \mathcal{M}''\right] + \frac{2}{\mu + h_0} L_6, \qquad L_4 = -\frac{1}{\mu + h_0} L_5.$$

Dans ces équations, remplaçons les lettres U et L par les

lettres V et N; elles détermineront six nouvelles quantités N_1, $N_2, \ldots, N_6$. Dans les mêmes équations, remplaçons partout les lettres U et N par les lettres W et Q; elles détermineront encore six nouvelles quantités $Q_1, Q_2, \ldots, Q_6$.

Déterminons enfin les six quantités $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_6$ à l'aide des équations

$$\Pi_1 = -3\frac{n}{(\mu - h_0)^2}\frac{P_2}{a} + 3\frac{n}{(\mu - h_0)^3}\frac{P_3}{a}, \quad \Pi_2 = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu - h_0}\frac{P_2}{a} - 3\frac{n}{(\mu - h_0)^2}\frac{P_3}{a},$$

$$\Pi_3 = -\frac{3}{2}\frac{n}{\mu - h_0}\frac{P_3}{a}, \quad \Pi_4 = -3\frac{n}{(\mu + h_0)^2}\frac{P_5}{a} + 3\frac{n}{(\mu + h_0)^3}\frac{P_6}{a},$$

$$\Pi_5 = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu + h_0}\frac{P_5}{a} - 3\frac{n}{(\mu + h_0)^2}\frac{P_6}{a}, \quad \Pi_6 = -\frac{3}{2}\frac{n}{\mu + h_0}\frac{P_6}{a}.$$

On aura alors

$$\begin{aligned}
\delta_1\gamma = & -\frac{1}{\mu^2}X_0(A\cos\varpi^0 - B\sin\varpi^0) - \frac{1}{\mu}X_0(A\sin\varpi^0 + B\cos\varpi^0)\,t \\
& + \frac{2}{\mu^3}X_0(A_1\sin\varpi^0 + B_1\cos\varpi^0) - \frac{2}{\mu^2}X_0(A_1\cos\varpi^0 - B_1\sin\varpi^0)\,t \\
& - \frac{1}{\mu}X_0(A_1\sin\varpi^0 + B_1\cos\varpi^0)\,t^2 + K_1(A^2 + B^2)\cos(\varpi^0 - \theta_0) \\
& + K_2(A^2 + B^2)\,t\sin(\varpi^0 - \theta_0) + K_3(A^2 + B^2)\,t^2\cos(\varpi^0 - \theta_0) \\
& + K_4\left[\frac{1}{2}(B^2 - A^2)\cos(\varpi^0 + \theta_0) + AB\sin(\varpi^0 + \theta_0)\right] \\
& + K_5\left[\frac{1}{2}(B^2 - A^2)\sin(\varpi^0 + \theta_0) - AB\cos(\varpi^0 + \theta_0)\right]t \\
& + K_6\left[\frac{1}{2}(B^2 - A^2)\cos(\varpi^0 + \theta_0) + AB\sin(\varpi^0 + \theta_0)\right]t^2.
\end{aligned}$$

Si, dans le second membre de cette formule, on remplace les lettres X et K par Y et M, on obtiendra la valeur de $\delta_1 e$; si l'on y remplace les lettres X et K par Z et P, on obtiendra la valeur de $\delta_1 a$. On aura ensuite

$$\begin{aligned}
\delta_1\theta = & \frac{1}{\mu^2}U_0(A\sin\varpi^0 + B\cos\varpi^0) - \frac{1}{\mu}U_0(A\cos\varpi^0 - B\sin\varpi^0)\,t \\
& + \frac{2}{\mu^3}U_0(A_1\cos\varpi^0 - B_1\sin\varpi^0) + \frac{2}{\mu^2}U_0(A_1\sin\varpi^0 + B_1\cos\varpi^0)\,t
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\mu}U_0(A_1\cos\mathfrak{V}^\circ-B_1\sin\mathfrak{V}^\circ)t^2+L_1(A^2+B^2)\sin(\mathfrak{V}^\circ-\theta_0)$$
$$+L_2(A^2+B^2)t\cos(\mathfrak{V}^\circ-\theta_0)+L_3(A^2+B^2)t^2\sin(\mathfrak{V}^\circ-\theta_0)$$
$$+L_4\left[\frac{1}{2}(B^2-A^2)\sin(\mathfrak{V}^\circ+\theta_0)-AB\cos(\mathfrak{V}^\circ+\theta_0)\right]$$
$$+L_5\left[\frac{1}{2}(B^2-A^2)\cos(\mathfrak{V}^\circ+\theta_0)+AB\sin(\mathfrak{V}^\circ+\theta_0)\right]t$$
$$+L_6\left[\frac{1}{2}(B^2-A^2)\sin(\mathfrak{V}^\circ+\theta_0)-AB\cos(\mathfrak{V}^\circ+\theta_0)\right]t^2.$$

Si, dans le second membre de cette formule, on remplace les lettres U et L par V et N, on obtiendra la valeur de $\delta_1\varpi$; si l'on y remplace les lettres U et L par W et Q, on obtiendra la valeur de $\delta_1\lambda$. On aura enfin

$$\int\delta_1 n\,dt=3\frac{n}{\mu^2}\frac{Z_0}{a}(A\sin\mathfrak{V}^\circ+B\cos\mathfrak{V}^\circ)-\frac{3}{2}\frac{n}{\mu^2}\frac{Z_0}{a}(A\cos\mathfrak{V}^\circ-B\sin\mathfrak{V}^\circ)t$$
$$+9\frac{n}{\mu^2}\frac{Z_0}{a}(A_1\cos\mathfrak{V}^\circ-B_1\sin\mathfrak{V}^\circ)+6\frac{n}{\mu^2}\frac{Z_0}{a}(A_1\sin\mathfrak{V}^\circ+B_1\cos\mathfrak{V}^\circ)t$$
$$-\frac{3}{2}\frac{n}{\mu^2}\frac{Z_0}{a}(A_1\cos\mathfrak{V}^\circ-B_1\sin\mathfrak{V}^\circ)t^2+\Pi_1(A^2+B^2)\sin(\mathfrak{V}^\circ-\theta_0)$$
$$+\Pi_2(A^2+B^2)t\cos(\mathfrak{V}^\circ-\theta_0)+\Pi_3(A^2+B^2)t^2\sin(\mathfrak{V}^\circ-\theta_0)$$
$$+\Pi_4\left[\frac{1}{2}(B^2-A^2)\sin(\mathfrak{V}^\circ+\theta_0)-AB\cos(\mathfrak{V}^\circ+\theta_0)\right]$$
$$+\Pi_5\left[\frac{1}{2}(B^2-A^2)\cos(\mathfrak{V}^\circ+\theta_0)+AB\sin(\mathfrak{V}^\circ+\theta_0)\right]t$$
$$+\Pi_6\left[\frac{1}{2}(B^2-A^2)\sin(\mathfrak{V}^\circ+\theta_0)-AB\cos(\mathfrak{V}^\circ+\theta_0)\right]t^2.$$

Observons que, dans ces valeurs de $\delta_1\gamma$, $\delta_1\theta$, $\int\delta_1 n\,dt$, et dans les valeurs de $\delta_1 e$, $\delta_1\varpi$, $\delta_1 a$, $\delta_1\lambda$, qui s'en déduisent, les termes d'arguments $\mathfrak{V}^\circ$ ont des coefficients du premier ordre au moins, et que les termes d'arguments $\mathfrak{V}^\circ\pm\theta_0$ ont des coefficients du second ordre.

CAS DE $m'_2 = +2$.

Terme considéré de R_2 : $C\gamma'^2 \cos b = C\gamma'^2 \cos(b + 2\theta')$.

On a

$$\begin{aligned}\delta_1\gamma = & \frac{4}{\mu^3} X_0 \left[\frac{1}{2}(B^2 - A^2)\cos b^0 - AB\sin b^0\right] \\ & + \frac{4}{\mu^2} X_0 \left[\frac{1}{2}(B^2 - A^2)\sin b^0 + AB\cos b^0\right] t \\ & - \frac{2}{\mu} X_0 \left[\frac{1}{2}(B^2 - A^2)\cos b^0 - AB\sin b^0\right] t^2.\end{aligned}$$

Si, dans le second membre de cette formule, on remplace la lettre X par la lettre Y, on obtient la valeur de $\delta_1 e$; si l'on y remplace la lettre X par la lettre Z, on obtient la valeur de $\delta_1 a$. On a ensuite

$$\begin{aligned}\delta_1\theta = & -\frac{4}{\mu^3} U_0 \left[\frac{1}{2}(B^2 - A^2)\sin b^0 + AB\cos b^0\right] \\ & + \frac{4}{\mu^2} U_0 \left[\frac{1}{2}(B^2 - A^2)\cos b^0 - AB\sin b^0\right] t \\ & + \frac{2}{\mu} U_0 \left[\frac{1}{2}(B^2 - A^2)\sin b^0 + AB\cos b^0\right] t^2.\end{aligned}$$

Si, dans le second membre de cette formule, on remplace la lettre U par la lettre V, on obtient la valeur de $\delta_1\varpi$; si l'on y remplace la lettre U par la lettre W, on obtient la valeur de $\delta_1\lambda$. On a enfin

$$\begin{aligned}\int\delta_1 n\,dt = & -18 \frac{n}{\mu^4}\frac{Z_0}{a} \left[\frac{1}{2}(B^2 - A^2)\sin b^0 + AB\cos b^0\right] \\ & + 12 \frac{n}{\mu^3}\frac{Z_0}{a} \left[\frac{1}{2}(B^2 - A^2)\cos b^0 - AB\sin b^0\right] t \\ & + 3 \frac{n}{\mu^2}\frac{Z_0}{a} \left[\frac{1}{2}(B^2 - A^2)\sin b^0 + AB\cos b^0\right] t^2.\end{aligned}$$

Observons que, dans ces valeurs de $\delta_1\gamma$, $\delta_1\theta$, $\int\delta_1 n\,dt$, et dans les valeurs de $\delta_1 e$, $\delta_1\varpi$, $\delta_1 a$, $\delta_1\lambda$ qui s'en déduisent, tous les termes sont du second ordre.

CAS DE $m'_2 = -2$.

Terme considéré de R_2 : $C\gamma'^2 \cos \text{b} = C\gamma'^2 \cos(\text{b} - 2\theta')$.

On a

$$\delta_1\gamma = \frac{4}{\mu^2} X_0 \left[\frac{1}{2}(B^2 - A^2) \cos \text{b}^\circ + AB \sin \text{b}^\circ \right]$$
$$+ \frac{4}{\mu^2} X_0 \left[\frac{1}{2}(B^2 - A^2) \sin \text{b}^\circ - AB \cos \text{b}^\circ \right] t$$
$$- \frac{2}{\mu} X_0 \left[\frac{1}{2}(B^2 - A^2) \cos \text{b}^\circ + AB \sin \text{b}^\circ \right] t^2.$$

Si, dans le second membre de cette formule, on remplace la lettre X par la lettre Y, on obtient la valeur de $\delta_1 e$; si l'on y remplace la lettre X par la lettre Z, on obtient la valeur de $\delta_1 a$. On a ensuite

$$\delta_1\theta = -\frac{4}{\mu^2} U_0 \left[\frac{1}{2}(B^2 - A^2) \sin \text{b}^\circ - AB \cos \text{b}^\circ \right]$$
$$+ \frac{4}{\mu^2} U_0 \left[\frac{1}{2}(B^2 - A^2) \cos \text{b}^\circ + AB \sin \text{b}^\circ \right] t$$
$$+ \frac{2}{\mu} U_0 \left[\frac{1}{2}(B^2 - A^2) \sin \text{b}^\circ - AB \cos \text{b}^\circ \right] t^2.$$

Si, dans le second membre de cette formule, on remplace la lettre U par la lettre V, on obtient la valeur de $\delta_1\varpi$; si l'on y remplace la lettre U par la lettre W, on obtient la valeur de $\delta_1\lambda$. On a enfin

$$\int \delta_1 n dt = -18 \frac{n}{\mu^3} \frac{Z_0}{a} \left[\frac{1}{2}(B^2 - A^2) \sin \text{b}^\circ - AB \cos \text{b}^\circ \right]$$
$$+ 12 \frac{n}{\mu^2} \frac{Z_0}{a} \left[\frac{1}{2}(B^2 - A^2) \cos \text{b}^\circ + AB \sin \text{b}^\circ \right] t$$
$$+ 3 \frac{n}{\mu^2} \frac{Z_0}{a} \left[\frac{1}{2}(B^2 - A^2) \sin \text{b}^\circ - AB \cos \text{b}^\circ \right] t^2.$$

Observons que dans ces valeurs de $\delta_1\gamma$, $\delta_1\theta$, $\int \delta_1 n dt$, et dans les valeurs de $\delta_1 e$, $\delta_1\varpi$, $\delta_1 a$, $\delta_1\lambda$ qui s'en déduisent, tous les termes sont du second ordre.

Revenons maintenant aux formules $\frac{d\delta_2 n}{dt} = \delta_1\left(\frac{3J}{a^2}\right)$, $\frac{d\delta_2\lambda}{dt} = \delta_1 S$, qui doivent nous servir à calculer les deux parties $\int \delta_2 n\,dt$ et $\delta_2\lambda$ de $\delta_2 l$. Chaque terme de l'une ou de l'autre des quantités $\frac{3J}{a^2}$, S provient de l'un des termes de la fonction perturbatrice totale R et a le même argument. Par conséquent, on retrouvera dans $\delta_1\left(\frac{3J}{a^2}\right)$ et dans $\delta_1 S$ les arguments de la fonction R combinés par addition et soustraction avec les arguments $\mathcal{A}^\circ$, $\mathcal{A}^\circ \pm \theta_0$, $\mathcal{A}^\circ \pm 2\theta_0$, $\mathcal{B}^\circ$, $\mathcal{B}^\circ \pm \theta_0$, b°, qui figurent dans les valeurs de $\delta_1\gamma$, $\delta_1 e$, $\delta_1 a$, $\delta_1\theta$, $\delta_1\varpi$, $\delta_1\lambda$, $\int \delta_1 n dt$. Représentons un argument quelconque de R par Ω, ou par $\Psi \pm \theta'$, ou par $\psi \pm 2\theta'$[1], suivant que le coefficient de θ' y est égal ou à zéro, ou à ± 1, ou à ± 2 : remplaçons d'ailleurs $\gamma' \sin\theta'$, $\gamma' \cos\theta'$ par leurs valeurs $At + A_1 t^2$, $Bt + B_1 t^2$, de manière que θ' ne figure plus dans les arguments. Alors, et en négligeant toujours les quantités d'ordre supérieur au second, $\delta_1\left(\frac{3J}{a^2}\right)$, $\delta_1 S$ se trouveront exprimés par des sommes de termes dont les arguments seront de l'une des formes suivantes :

$$\mathcal{A}^\circ \pm \Omega, \quad \mathcal{A}^\circ \pm \theta_0 \pm \Omega, \quad \mathcal{A}^\circ \pm 2\theta_0 \pm \Omega, \quad \mathcal{B}^\circ \pm \Omega,$$
$$\mathcal{B}^\circ \pm \theta_0 \pm \Omega, \quad b^\circ \pm \Omega, \quad \mathcal{A}^\circ \pm \Psi, \quad \mathcal{A}^\circ \pm \theta_0 \pm \Psi,$$
$$\mathcal{B}^\circ \pm \Psi, \quad \mathcal{A}^\circ \pm \psi.$$

Mais les coefficients de ces termes contiendront la variable γ et, dans les parties $\pm\Omega$, $\pm\Psi$, $\pm\psi$ des arguments, entreront les angles θ, ϖ, λ. Or ces quantités γ, θ, ϖ, λ doivent encore être remplacées par $\gamma_0 + \Delta\gamma$, $\theta^\circ + \Delta\theta$, $\varpi^\circ + \Delta\varpi$, $\lambda^\circ + \Delta\lambda$. Faisons cette substitution et appelons Ω°, Ψ°, ψ° les angles fonctions linéaires du temps auxquels se réduisent Ω, Ψ, ψ, lorsqu'on remplace l,

[1] Les lettres Ω, Ψ, ψ reçoivent ici et garderont désormais une signification différente de celle qui leur a été attribuée pages 24 et 25.

ϖ, θ, par $\mathfrak{b}^0$, ϖ^0, θ^0. Alors $\delta_1\left(\frac{3J}{a^2}\right)$ et $\delta_1 S$ se composeront de termes ayant des arguments de l'une des formes suivantes :

$$\mathfrak{A}^0 \pm \Omega^0, \quad \mathfrak{A}^0 \pm \Omega^0 \pm \theta_0, \quad \mathfrak{A}^0 \pm \Omega^0 \pm 2\theta_0, \quad \mathfrak{B}^0 \pm \Omega^0,$$
$$\mathfrak{B}^0 \pm \Omega^0 \pm \theta_0, \quad \mathfrak{b}^0 \pm \Omega^0, \quad \mathfrak{A}^0 \pm \Psi^0, \quad \mathfrak{A}^0 \pm \Psi^0 \pm \theta_0,$$
$$\mathfrak{B}^0 \pm \Psi^0, \quad \mathfrak{A}^0 \pm \psi^0.$$

Comme d'ailleurs les arguments qu'on vient d'énumérer appartiendront, à l'exception du premier, à des termes qui seront au moins du premier ordre, on pourra remplacer θ_0 par θ^0, qui n'en diffère que d'une quantité du second ordre. Nous regarderons donc définitivement $\delta_1\left(\frac{3J}{a^2}\right)$ et $\delta_1 S$ comme composés de termes dont les arguments ont l'une des formes

$$\mathfrak{A}^0 \pm \Omega^0, \quad \mathfrak{A}^0 \pm \Omega^0 \pm \theta^0, \quad \mathfrak{A}^0 \pm \Omega^0 \pm 2\theta^0, \quad \mathfrak{B}^0 \pm \Omega^0,$$
$$\mathfrak{B}^0 \pm \Omega^0 \pm \theta^0, \quad \mathfrak{b}^0 \pm \Omega^0, \quad \mathfrak{A}^0 \pm \Psi^0, \quad \mathfrak{A}^0 \pm \Psi^0 \pm \theta^0,$$
$$\mathfrak{B}^0 \pm \Psi^0, \quad \mathfrak{A}^0 \pm \psi^0.$$

Chacun des termes dont nous venons d'indiquer le calcul proviendra de la combinaison d'un certain terme de R_2 ayant pour argument $\mathfrak{A}$, ou $\mathfrak{B} \pm \theta'$ ou $\mathfrak{b} \pm 2\theta'$, avec un certain terme de R ayant pour argument Ω, ou $\Psi \pm \theta'$, ou $\psi \pm 2\theta'$. Nous avons à examiner maintenant quelles sont les combinaisons de ce genre qui peuvent nous donner dans $\delta_1\left(\frac{3J}{a^2}\right)$ et dans $\delta_1 S$ des parties non périodiques, c'est-à-dire ne renfermant pas comme facteur le sinus ou le cosinus d'un angle variant avec le temps[1].

Or il est clair que la condition nécessaire et suffisante pour

[1] On se souviendra que nous regardons l'angle ϖ' comme une constante, et qu'ainsi un terme renfermant en facteur le sinus ou le cosinus d'un multiple de ϖ' ne doit pas être considéré comme périodique.

qu'on obtienne de telles parties est que, dans quelqu'un des angles

$$(a)\left\{\begin{array}{lllll} & \mathcal{A}\pm\Omega, & \mathcal{A}\pm\Omega\pm\theta, & \mathcal{A}\pm\Omega\pm2\theta, & \mathcal{B}\pm\Omega, \\ \mathcal{B}\pm\Omega\pm\theta, & \mathrm{b}\pm\Omega, & \mathcal{A}\pm\Psi, & \mathcal{A}\pm\Psi\pm\theta, & \mathcal{B}\pm\Psi, \\ & & \mathcal{A}\pm\psi, & & \end{array}\right.$$

les coefficients de l, ϖ, θ, l' se réduisent tous les quatre à zéro, ou, ce qui est la même chose, qu'un des angles de cette liste se réduise soit à zéro, soit à un multiple de ϖ'. Il sera donc aisé, à l'inspection du développement de la fonction perturbatrice, de reconnaître quels termes de R_2 on doit associer à chaque terme de R. Nous allons transcrire ce développement.

Lorsqu'on néglige les puissances de γ' supérieures à la seconde, les coefficients des différents termes de R sont, comme on l'a déjà dit, de l'une des formes $C+\overline{C}\gamma'^2$, $C\gamma'$, $C\gamma'^2$: les quantités C, $\overline{C}$ peuvent elles-mêmes être développées suivant les puissances de γ, e, e', $\frac{a}{a'}$; nous pousserons ces développements jusqu'au quatrième degré, en regardant γ, e, e', $\sqrt{\frac{a}{a'}}$ comme du premier. Nous négligerons par conséquent les termes de R dans lesquels la somme des exposants de γ, e, e', $\sqrt{\frac{a}{a'}}$ serait supérieure à 4.

Le développement de R ainsi limité se compose des 408 termes contenus dans le tableau suivant : chaque terme y est accompagné d'un numéro d'ordre, qui pourra servir à le désigner.

DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION PERTURBATRICE R.

R =

$$(0)\left\{\begin{array}{l} n'^2\varepsilon a^2\Big[-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\gamma^2-\frac{3}{8}e^2-\frac{3}{8}e'^2-\frac{3}{2}\gamma^4+\frac{9}{4}e^2\gamma^2+\frac{9}{4}e'^2\gamma^2-\frac{9}{16}e^2e'^2-\frac{15}{32}e'^4 \\ \qquad -\frac{9}{64}\frac{a^2}{a'^2}+\Big(\frac{3}{2}-9\gamma^2+\frac{9}{4}e^2+\frac{9}{4}e'^2+9\gamma^4-\frac{27}{2}e^2\gamma^2-\frac{27}{2}e'^2\gamma^2 \\ \qquad\qquad +\frac{27}{8}e^2e'^2+\frac{45}{16}e'^4+\frac{45}{16}\frac{a^2}{a'^2}\Big)\gamma'^2\Big]\cos 0 \end{array}\right.$$

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &+n'^2\varepsilon a^2\Big[-\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{2}\gamma^2+\tfrac{15}{8}e^2+\tfrac{15}{8}e'^2-\tfrac{3}{2}\gamma^4-\tfrac{15}{4}e^2\gamma^2 \\ &\qquad -\tfrac{15}{4}e'^2\gamma^2-\tfrac{69}{64}e^4-\tfrac{75}{16}e^2e'^2-\tfrac{39}{64}e'^4-\tfrac{5}{16}\tfrac{a^2}{a'^2} \\ &\qquad +\Big(\tfrac{3}{2}-3\gamma^2-\tfrac{15}{4}e^2-\tfrac{15}{4}e'^2+\tfrac{3}{2}\gamma^4+\tfrac{15}{2}e^2\gamma^2+\tfrac{15}{2}e'^2\gamma^2 \\ &\qquad\qquad +\tfrac{69}{32}e^4+\tfrac{75}{8}e^2e'^2+\tfrac{39}{32}e'^4+5\tfrac{a^2}{a'^2}\Big)\gamma'^2\Big]\cos(2l-2l') \end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &+n'^2\varepsilon a^2\Big(-\tfrac{3}{2}+3\gamma^2+\tfrac{15}{4}e^2-\tfrac{9}{4}e'^2-\tfrac{3}{2}\gamma^4-\tfrac{15}{2}e^2\gamma^2+\tfrac{9}{2}e'^2\gamma^2-\tfrac{69}{32}e^4 \\ &\qquad +\tfrac{45}{8}e^2e'^2-\tfrac{45}{16}e'^4-\tfrac{45}{16}\tfrac{a^2}{a'^2}\Big)\gamma'^2\cos(2l-2\theta') \end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &+n'^2\varepsilon a^2\Big(-\tfrac{3}{2}+9\gamma^2-\tfrac{9}{4}e^2+\tfrac{15}{4}e'^2-9\gamma^4+\tfrac{27}{2}e^2\gamma^2-\tfrac{45}{2}e'^2\gamma^2+\tfrac{45}{8}e^2e'^2 \\ &\qquad -\tfrac{39}{32}e'^4-\tfrac{45}{16}\tfrac{a^2}{a'^2}\Big)\gamma'^2\cos(2l'-2\theta') \end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &+n'^2\varepsilon a^2\Big[-\tfrac{3}{4}e'+\tfrac{9}{2}e'\gamma^2-\tfrac{9}{8}e^2e'-\tfrac{27}{32}e'^3 \\ &\qquad +\Big(\tfrac{9}{2}e'-27e'\gamma^2+\tfrac{27}{4}e^2e'+\tfrac{81}{16}e'^3\Big)\gamma'^2\Big]\cos(l'-\varpi') \end{aligned}\right.$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &+n'^2\varepsilon a^2\Big[\tfrac{1}{2}e-3e\gamma^2-\tfrac{1}{16}e^3+\tfrac{3}{4}ee'^2 \\ &\qquad +\Big(-3e+18e\gamma^2+\tfrac{3}{8}e^3-\tfrac{9}{2}ee'^2\Big)\gamma'^2\Big]\cos(l-\varpi) \end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &+n'^2\varepsilon a^2\Big[\tfrac{3}{8}e'-\tfrac{3}{4}e'\gamma^2-\tfrac{15}{16}e^2e'-\tfrac{3}{64}e'^3 \\ &\qquad +\Big(-\tfrac{3}{4}e'+\tfrac{3}{2}e'\gamma^2+\tfrac{15}{8}e^2e'+\tfrac{3}{32}e'^3\Big)\gamma'^2\Big]\cos(2l-l'-\varpi') \end{aligned}\right.$$

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &+n'^2\varepsilon a^2\Big[-\tfrac{21}{8}e'+\tfrac{21}{4}e'\gamma^2+\tfrac{105}{16}e^2e'+\tfrac{369}{64}e'^3 \\ &\qquad +\Big(\tfrac{21}{4}e'-\tfrac{21}{2}e'\gamma^2-\tfrac{105}{8}e^2e'-\tfrac{369}{32}e'^3\Big)\gamma'^2\Big]\cos(2l-3l'+\varpi') \end{aligned}\right.$$

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &+n'^2\varepsilon a^2\Big[\tfrac{9}{4}e-\tfrac{9}{2}e\gamma^2-\tfrac{39}{32}e^3-\tfrac{45}{8}ee'^2 \\ &\qquad +\Big(-\tfrac{9}{2}e+9e\gamma^2+\tfrac{39}{16}e^3+\tfrac{45}{4}ee'^2\Big)\gamma'^2\Big]\cos(l+\varpi-2l') \end{aligned}\right.$$

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &+n'^2\varepsilon a^2\Big[-\tfrac{3}{4}e+\tfrac{3}{2}e\gamma^2+\tfrac{57}{32}e^3+\tfrac{15}{8}ee'^2 \\ &\qquad +\Big(\tfrac{3}{2}e-3e\gamma^2-\tfrac{57}{16}e^3-\tfrac{15}{4}ee'^2\Big)\gamma'^2\Big]\cos(3l-\varpi-2l') \end{aligned}\right.$$

$$(10)\quad +n'^2\varepsilon a^2\Big(-3\gamma+\tfrac{9}{2}\gamma^3+\tfrac{15}{2}e^2\gamma+\tfrac{15}{2}e'^2\gamma\Big)\gamma'(\cos 2l-\theta-2l'+\theta')$$

$$(11) \quad + n'^2 \varepsilon a^2 \left(-3\gamma + \frac{15}{2}\gamma^3 - \frac{9}{2}e^2\gamma - \frac{9}{2}e'^2\gamma \right) \gamma' \cos(\theta - \theta').$$

$$(12) \quad + n'^2 \varepsilon a^2 \left(3\gamma - \frac{9}{2}\gamma^3 - \frac{15}{2}e^2\gamma + \frac{9}{2}e'^2\gamma \right) \gamma' \cos(2l - \theta - \theta')$$

$$(13) \quad + n'^2 \varepsilon a^2 \left(3\gamma - \frac{15}{2}\gamma^3 + \frac{9}{2}e^2\gamma - \frac{15}{2}e'^2\gamma \right) \gamma' \cos(-\theta + 2l' - \theta')$$

$$(14) \quad + n'^2 \varepsilon a^2 \left(-\frac{9}{4}e' + \frac{9}{2}e'\gamma^2 + \frac{45}{8}e^2e' - \frac{81}{32}e'^3 \right) \gamma'^2 \cos(2l + l' - \varpi' - 2\theta')$$

$$(15) \quad + n'^2 \varepsilon a^2 \left(-\frac{9}{4}e' + \frac{9}{2}e'\gamma^2 + \frac{45}{8}e^2e' - \frac{81}{32}e'^3 \right) \gamma'^2 \cos(2l - l' + \varpi' - 2\theta')$$

$$(16) \quad + n'^2 \varepsilon a^2 \left(\frac{9}{2}e - 9e\gamma^2 - \frac{39}{16}e^3 + \frac{27}{4}ee'^2 \right) \gamma'^2 \cos(l + \varpi - 2\theta')$$

$$(17) \quad + n'^2 \varepsilon a^2 \left(-\frac{3}{2}e + 3e\gamma^2 + \frac{57}{16}e^3 - \frac{9}{4}ee'^2 \right) \gamma'^2 \cos(3l - \varpi - 2\theta')$$

$$(18) \quad + n'^2 \varepsilon a^2 \left(\frac{3}{4}e' - \frac{9}{2}e'\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2e' - \frac{3}{32}e'^3 \right) \gamma'^2 \cos(l' + \varpi' - 2\theta')$$

$$(19) \quad + n'^2 \varepsilon a^2 \left(-\frac{21}{4}e' + \frac{63}{2}e'\gamma^2 - \frac{63}{8}e^2e' + \frac{369}{32}e'^3 \right) \gamma'^2 \cos(3l' - \varpi' - 2\theta')$$

$$(20) \quad + n'^2 \varepsilon a^2 \left(\frac{3}{2}e - 9e\gamma^2 - \frac{3}{16}e^3 - \frac{15}{4}ee'^2 \right) \gamma'^2 \cos(l - \varpi + 2l' - 2\theta')$$

$$(21) \quad + n'^2 \varepsilon a^2 \left(\frac{3}{2}e - 9e\gamma^2 - \frac{3}{16}e^3 - \frac{15}{4}ee'^2 \right) \gamma'^2 \cos(l - \varpi - 2l' + 2\theta')$$

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} &+ n'^2 \varepsilon a^2 \Big[-\frac{9}{8}e'^2 + \frac{27}{4}e'^2\gamma^2 - \frac{27}{16}e^2e'^2 - \frac{7}{8}e'^4 \\ &\qquad + \left(\frac{27}{4}e'^2 - \frac{81}{2}e'^2\gamma^2 + \frac{81}{8}e^2e'^2 + \frac{21}{4}e'^4 \right) \gamma'^2 \Big] \cos(2l' - 2\varpi') \end{aligned} \right.$$

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} &+ n'^2 \varepsilon a^2 \Big[\frac{3}{4}ee' - \frac{9}{2}ee'\gamma^2 - \frac{3}{32}e^3e' + \frac{27}{32}ee'^3 \\ &\qquad + \left(-\frac{9}{2}ee' + 27ee'\gamma^2 + \frac{9}{16}e^3e' - \frac{81}{16}ee'^3 \right) \gamma'^2 \Big] \cos(l - \varpi + l' - \varpi') \end{aligned} \right.$$

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} &+ n'^2 \varepsilon a^2 \Big[\frac{3}{4}ee' - \frac{9}{2}ee'\gamma^2 - \frac{3}{32}e^3e' + \frac{27}{32}ee'^3 \\ &\qquad + \left(-\frac{9}{2}ee' + 27ee'\gamma^2 + \frac{9}{16}e^3e' - \frac{81}{16}ee'^3 \right) \gamma'^2 \Big] \cos(l - \varpi - l' + \varpi') \end{aligned} \right.$$

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} &+ n'^2 \varepsilon a^2 \Big[\frac{1}{8}e^2 - \frac{3}{4}e^2\gamma^2 - \frac{1}{24}e^4 + \frac{3}{16}e^2e'^2 \\ &\qquad + \left(-\frac{3}{4}e^2 + \frac{9}{2}e^2\gamma^2 + \frac{1}{4}e^4 - \frac{9}{8}e^2e'^2 \right) \gamma'^2 \Big] \cos(2l - 2\varpi) \end{aligned} \right.$$

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} &+ n'^2 \varepsilon a^2 \Big[-\frac{51}{8}e'^2 + \frac{51}{4}e'^2\gamma^2 + \frac{255}{16}e^2e'^2 + \frac{115}{8}e'^4 \\ &\qquad + \left(\frac{51}{4}e'^2 - \frac{51}{2}e'^2\gamma^2 - \frac{255}{8}e^2e'^2 - \frac{115}{4}e'^4 \right) \gamma'^2 \Big] \cos(2l - 4l' + 2\varpi') \end{aligned} \right.$$

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} &+n'^2\varepsilon a^2\Big[-\tfrac{9}{8}ee'+\tfrac{9}{4}ee'\gamma^2+\tfrac{39}{64}e^3e'+\tfrac{9}{64}ee'^3\\ &\qquad+\Big(\tfrac{9}{4}ee'-\tfrac{9}{2}ee'\gamma^2-\tfrac{39}{32}e^3e'-\tfrac{9}{32}ee'^3\Big)\gamma'^2\Big]\cos(l+\varpi-l'-\varpi')\end{aligned}\right.$$

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} &+n'^2\varepsilon a^2\Big[\tfrac{63}{8}ee'-\tfrac{63}{4}ee'\gamma^2-\tfrac{273}{64}e^3e'-\tfrac{1107}{64}ee'^3\\ &\qquad+\Big(-\tfrac{63}{4}ee'+\tfrac{63}{2}ee'\gamma^2+\tfrac{273}{32}e^3e'+\tfrac{1107}{32}ee'^3\Big)\gamma'^2\Big]\cos(l+\varpi-3l'+\varpi')\end{aligned}\right.$$

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} &+n'^2\varepsilon a^2\Big[\tfrac{3}{8}ee'-\tfrac{3}{4}ee'\gamma^2-\tfrac{57}{64}e^3e'-\tfrac{3}{64}ee'^3\\ &\qquad+\Big(-\tfrac{3}{4}ee'+\tfrac{3}{2}ee'\gamma^2+\tfrac{57}{32}e^3e'+\tfrac{3}{32}ee'^3\Big)\gamma'^2\Big]\cos(3l-\varpi-l'-\varpi')\end{aligned}\right.$$

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} &+n'^2\varepsilon a^2\Big[-\tfrac{21}{8}ee'+\tfrac{21}{4}ee'\gamma^2+\tfrac{399}{64}e^3e'+\tfrac{369}{64}ee'^3\\ &\qquad+\Big(\tfrac{21}{4}ee'-\tfrac{21}{2}ee'\gamma^2-\tfrac{399}{32}e^3e'-\tfrac{369}{32}ee'^3\Big)\gamma'^2\Big]\cos(3l-\varpi-3l'+\varpi')\end{aligned}\right.$$

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} &+n'^2\varepsilon a^2\Big[-\tfrac{15}{8}e^2+\tfrac{15}{4}e^2\gamma^2+\tfrac{75}{16}e^2e'^2\\ &\qquad+\Big(\tfrac{15}{4}e^2-\tfrac{15}{2}e^2\gamma^2-\tfrac{75}{8}e^2e'^2\Big)\gamma'^2\Big]\cos(-2\varpi+2l')\end{aligned}\right.$$

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &+n'^2\varepsilon a^2\Big[-\tfrac{3}{4}e^2+\tfrac{3}{2}e^2\gamma^2+\tfrac{15}{8}e^4+\tfrac{15}{8}e^2e'^2\\ &\qquad+\Big(\tfrac{3}{2}e^2-3e^2\gamma^2-\tfrac{15}{4}e^4-\tfrac{15}{4}e^2e'^2\Big)\gamma'^2\Big]\cos(4l-2\varpi-2l')\end{aligned}\right.$$

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} &+n'^2\varepsilon a^2\Big[-\tfrac{3}{2}\gamma^2+\tfrac{3}{2}\gamma^4+\tfrac{15}{4}e^2\gamma^2-\tfrac{9}{4}e'^2\gamma^2\\ &\qquad+\Big(9\gamma^2-9\gamma^4-\tfrac{45}{2}e^2\gamma^2+\tfrac{27}{2}e'^2\gamma^2\Big)\gamma'^2\Big]\cos(2l-2\theta)\end{aligned}\right.$$

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &+n'^2\varepsilon a^2\Big[-\tfrac{3}{2}\gamma^2+\tfrac{3}{2}\gamma^4-\tfrac{9}{4}e^2\gamma^2+\tfrac{15}{4}e'^2\gamma^2\\ &\qquad+\Big(3\gamma^2-3\gamma^4+\tfrac{9}{2}e^2\gamma^2-\tfrac{15}{2}e'^2\gamma^2\Big)\gamma'^2\Big]\cos(-2\theta+2l')\end{aligned}\right.$$

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} &+n'^2\varepsilon a^2\cdot\tfrac{a}{a'}\Big[-\tfrac{3}{8}+\tfrac{33}{8}\gamma^2-\tfrac{3}{4}e^2-\tfrac{3}{4}e'^2\\ &\qquad+\Big(\tfrac{33}{8}-\tfrac{363}{8}\gamma^2+\tfrac{33}{4}e^2+\tfrac{33}{4}e'^2\Big)\gamma'^2\Big]\cos(l-l')\end{aligned}\right.$$

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} &+n'^2\varepsilon a^2\cdot\tfrac{a}{a'}\Big[-\tfrac{5}{8}+\tfrac{15}{8}\gamma^2+\tfrac{15}{4}e^2+\tfrac{15}{4}e'^2\\ &\qquad+\Big(\tfrac{15}{8}-\tfrac{45}{8}\gamma^2-\tfrac{45}{4}e^2-\tfrac{45}{4}e'^2\Big)\gamma'^2\Big]\cos(3l-3l')\end{aligned}\right.$$

(37) $+n'^2 \varepsilon a^2 \left(\frac{3}{2} e'\gamma - \frac{9}{4} e'\gamma^3 - \frac{15}{4} e^2 e'\gamma - \frac{3}{16} e'^3\gamma\right) \gamma' \cos(2l - \theta - l' - \varpi' + \theta')$

(38) $+n'^2 \varepsilon a^2 \left(\frac{21}{2} e'\gamma + \frac{63}{4} e'\gamma^3 + \frac{105}{4} e^2 e'\gamma + \frac{369}{16} e'^3\gamma\right) \gamma' \cos(2l - \theta - 3l' + \varpi' + \theta')$

(39) $+n'^2 \varepsilon a^2 \left(9e\gamma - \frac{27}{2} e\gamma^3 - \frac{39}{8} e^3\gamma - \frac{45}{2} ee'^2\gamma\right) \gamma' \cos(l + \varpi - \theta - 2l' + \theta')$

(40) $+n'^2 \varepsilon a^2 \left(-3e\gamma + \frac{9}{2} e\gamma^3 + \frac{57}{8} e^3\gamma + \frac{15}{2} ee'^2\gamma\right) \gamma' \cos(3l - \varpi - \theta - 2l' + \theta')$

(41) $+n'^2 \varepsilon a^2 \left(-\frac{9}{2} e'\gamma + \frac{45}{4} e'\gamma^3 - \frac{27}{4} e^2 e'\gamma - \frac{81}{16} e'^3\gamma\right) \gamma' \cos(\theta + l' - \varpi' - \theta')$

(42) $+n'^2 \varepsilon a^2 \left(-\frac{9}{2} e'\gamma + \frac{45}{4} e'\gamma^3 - \frac{27}{4} e^2 e'\gamma - \frac{81}{16} e'^3\gamma\right) \gamma' \cos(-\theta + l' - \varpi' + \theta')$

(43) $+n'^2 \varepsilon a^2 \left(3e\gamma - \frac{15}{2} e\gamma^3 - \frac{3}{8} e^3\gamma + \frac{9}{2} ee'^2\gamma\right) \gamma' \cos(l - \varpi + \theta - \theta')$

(44) $+n'^2 \varepsilon a^2 \left(3e\gamma - \frac{15}{2} e\gamma^3 - \frac{3}{8} e^3\gamma + \frac{9}{2} ee'^2\gamma\right) \gamma' \cos(l - \varpi - \theta + \theta')$

(45) $+n'^2 \varepsilon a^2 \left(\frac{9}{2} e'\gamma - \frac{27}{4} e'\gamma^3 - \frac{45}{4} e^2 e'\gamma + \frac{81}{16} e'^3\gamma\right) \gamma' \cos(2l - \theta + l' - \varpi' - \theta')$

(46) $+n'^2 \varepsilon a^2 \left(\frac{9}{2} e'\gamma - \frac{27}{4} e'\gamma^3 - \frac{45}{4} e^2 e'\gamma + \frac{81}{16} e'^3\gamma\right) \gamma' \cos(2l - \theta - l' + \varpi' - \theta')$

(47) $+n'^2 \varepsilon a^2 \left(-9e\gamma + \frac{27}{2} e\gamma^3 + \frac{39}{8} e^3\gamma - \frac{27}{2} ee'^2\gamma\right) \gamma' \cos(l + \varpi - \theta - \theta')$

(48) $+n'^2 \varepsilon a^2 \left(3e\gamma - \frac{9}{2} e\gamma^3 - \frac{57}{8} e^3\gamma + \frac{9}{2} ee'^2\gamma\right) \gamma' \cos(3l - \varpi - \theta - \theta')$

(49) $+n'^2 \varepsilon a^2 \left(-\frac{3}{2} e'\gamma + \frac{15}{4} e'\gamma^3 - \frac{9}{4} e^2 e'\gamma + \frac{3}{16} e'^3\gamma\right) \gamma' \cos(-\theta + l' + \varpi' - \theta')$

(50) $+n'^2 \varepsilon a^2 \left(\frac{21}{2} e'\gamma - \frac{105}{4} e'\gamma^3 + \frac{63}{4} e^2 e'\gamma - \frac{369}{16} e'^3\gamma\right) \gamma' \cos(-\theta + 3l' - \varpi' - \theta')$

(51) $+n'^2 \varepsilon a^2 \left(-3e\gamma + \frac{15}{2} e\gamma^3 + \frac{3}{8} e^3\gamma + \frac{15}{2} ee'^2\gamma\right) \gamma' \cos(l - \varpi - \theta + 2l' - \theta')$

(52) $+n'^2 \varepsilon a^2 \left(-3e\gamma + \frac{15}{2} e\gamma^3 + \frac{3}{8} e^3\gamma + \frac{15}{2} ee'^2\gamma\right) \gamma' \cos(l - \varpi + \theta - 2l' + \theta')$

(53) $+n'^2 \varepsilon a^2 \left(-\frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{2}\gamma^4 + \frac{45}{4} e^2\gamma^2 + \frac{45}{4} e'^2\gamma^2\right) \gamma'^2 \cos(2l - 2\theta - 2l' + 2\theta')$

(54) $+n'^2 \varepsilon a^2 \left(-\frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{2}\gamma^4 + \frac{45}{4} e^2\gamma^2 + \frac{45}{4} e'^2\gamma^2\right) \gamma'^2 \cos(2l - 2\theta + 2l' - 2\theta')$

(55) $+n'^2 \varepsilon a^2 \left(-3\gamma^2 + 3\gamma^4 - \frac{9}{2} e^2\gamma^2 - \frac{9}{2} e'^2\gamma^2\right) \gamma'^2 \cos(2\theta - 2\theta')$

$$(56)\quad \left\{ \begin{aligned} &+ n'^2\varepsilon a^2 \Big(-\tfrac{27}{8}e'^2 + \tfrac{27}{4}e'^2\gamma^2 + \tfrac{135}{16}e^2e'^2 \\ &\qquad\qquad - \tfrac{21}{8}e'^3\Big)\gamma'^2 \cos(2l + 2l' - 2\varpi' - 2\theta') \end{aligned} \right.$$

$$(57)\quad \left\{ \begin{aligned} &+ n'^2\varepsilon a^2 \Big(-\tfrac{27}{8}e'^2 + \tfrac{27}{4}e'^2\gamma^2 + \tfrac{135}{16}e^2e'^2 \\ &\qquad\qquad - \tfrac{21}{8}e'^4\Big)\gamma'^2 \cos(2l - 2l' + 2\varpi' - 2\theta') \end{aligned} \right.$$

$$(58)\quad \left\{ \begin{aligned} &+ n'^2\varepsilon a^2 \Big(\tfrac{27}{4}ee' - \tfrac{27}{2}ee'\gamma^2 - \tfrac{117}{32}e^3e' \\ &\qquad\qquad + \tfrac{243}{32}ee'^3\Big)\gamma'^2 \cos(l + \varpi + l' - \varpi' - 2\theta') \end{aligned} \right.$$

$$(59)\quad \left\{ \begin{aligned} &+ n'^2\varepsilon a^2 \Big(\tfrac{27}{4}ee' - \tfrac{27}{2}ee'\gamma^2 - \tfrac{117}{32}e^3e' \\ &\qquad\qquad + \tfrac{243}{32}ee'^3\Big)\gamma'^2 \cos(l + \varpi - l' + \varpi' - 2\theta') \end{aligned} \right.$$

$$(60)\quad \left\{ \begin{aligned} &+ n'^2\varepsilon a^2 \Big(-\tfrac{9}{4}ee' + \tfrac{9}{2}ee'\gamma^2 + \tfrac{171}{32}e^3e' \\ &\qquad\qquad - \tfrac{81}{32}ee'^3\Big)\gamma'^2 \cos(3l - \varpi + l' - \varpi' - 2\theta') \end{aligned} \right.$$

$$(61)\quad \left\{ \begin{aligned} &+ n'^2\varepsilon a^2 \Big(-\tfrac{9}{4}ee' + \tfrac{9}{2}ee'\gamma^2 + \tfrac{171}{32}e^3e' \\ &\qquad\qquad - \tfrac{81}{32}ee'^3\Big)\gamma'^2 \cos(3l - \varpi - l' + \varpi' - 2\theta') \end{aligned} \right.$$

$$(62)\quad + n'^2\varepsilon a^2 \Big(-\tfrac{15}{4}e^2 + \tfrac{15}{2}e^2\gamma^2 - \tfrac{45}{8}e^2e'^2\Big)\gamma'^2 \cos(2\varpi - 2\theta')$$

$$(63)\quad + n'^2\varepsilon a^2 \Big(-\tfrac{3}{2}e^2 + 3e^2\gamma^2 + \tfrac{15}{4}e^4 - \tfrac{9}{4}e^2e'^2\Big)\gamma'^2 \cos(4l - 2\varpi - 2\theta')$$

$$(64)\quad + n'^2\varepsilon a^2 \Big(-\tfrac{51}{4}e'^2 + \tfrac{153}{2}e'^2\gamma^2 - \tfrac{153}{8}e^2e'^2 + \tfrac{115}{4}e'^4\Big)\gamma'^2 \cos(4l' - 2\varpi' - 2\theta')$$

$$(65)\quad \left\{ \begin{aligned} &+ n'^2\varepsilon a^2 \Big(-\tfrac{3}{4}ee' + \tfrac{9}{2}ee'\gamma^2 + \tfrac{3}{32}e^3e' \\ &\qquad\qquad + \tfrac{3}{32}ee'^3\Big)\gamma'^2 \cos(l - \varpi + l' + \varpi' - 2\theta') \end{aligned} \right.$$

$$(66)\quad \left\{ \begin{aligned} &+ n'^2\varepsilon a^2 \Big(\tfrac{21}{4}ee' - \tfrac{63}{2}ee'\gamma^2 - \tfrac{21}{32}e^3e' \\ &\qquad\qquad - \tfrac{369}{32}ee'^3\Big)\gamma'^2 \cos(l - \varpi + 3l' - \varpi' - 2\theta') \end{aligned} \right.$$

$$(67)\quad \left\{ \begin{aligned} &+ n'^2\varepsilon a^2 \Big(-\tfrac{3}{4}ee' + \tfrac{9}{2}ee'\gamma^2 + \tfrac{3}{32}e^3e' \\ &\qquad\qquad + \tfrac{3}{32}ee'^3\Big)\gamma'^2 \cos(l - \varpi - l - \varpi + 2\theta') \end{aligned} \right.$$

(68) $$\left\{\begin{aligned}&+n'^2\varepsilon a^2\left(\tfrac{21}{4}ee'-\tfrac{63}{2}ee'\gamma^2-\tfrac{21}{32}e^3e'\right.\\&\qquad\left.-\tfrac{369}{32}ee'^3\right)\gamma'^2\cos(l-\varpi-3l'+\varpi'+2\theta')\end{aligned}\right.$$

(69) $$+n'^2\varepsilon a^2\left(\tfrac{3}{8}e^2-\tfrac{9}{4}e^2\gamma^2-\tfrac{1}{8}e^4-\tfrac{15}{16}e^2e'^2\right)\gamma'^2\cos(2l-2\varpi+2l'-2\theta')$$

(70) $$+n'^2\varepsilon a^2\left(\tfrac{3}{8}e^2-\tfrac{9}{4}e^2\gamma^2-\tfrac{1}{8}e^4-\tfrac{15}{16}e^2e'^2\right)\gamma'^2\cos(2l-2\varpi-2l'+2\theta')$$

(71) $$+n'^2\varepsilon a^2\cdot\tfrac{a}{a'}\left(-\tfrac{9}{4}+\tfrac{99}{4}\gamma^2-\tfrac{9}{2}e^2-\tfrac{9}{2}e'^2\right)\gamma'^2\cos(l+l'-2\theta')$$

(72) $$+n'^2\varepsilon a^2\cdot\tfrac{a}{a'}\left(-\tfrac{15}{8}+\tfrac{165}{8}\gamma^2-\tfrac{15}{4}e^2+\tfrac{45}{4}e'^2\right)\gamma'^2\cos(l-3l'+2\theta')$$

(73) $$+n'^2\varepsilon a^2\cdot\tfrac{a}{a'}\left(-\tfrac{15}{8}+\tfrac{45}{8}\gamma^2+\tfrac{45}{4}e^2-\tfrac{15}{4}e'^2\right)\gamma'^2\cos(3l-l'-2\theta')$$

(74) $$+n'^2\varepsilon a^2\left(-\tfrac{53}{32}e'^3+\tfrac{159}{16}e'^3\gamma'^2\right)\cos(3l'-3\varpi')$$

(75) $$+n'^2\varepsilon a^2\left(\tfrac{9}{8}ee'^2-\tfrac{27}{4}ee'^2\gamma'^2\right)\cos(l-\varpi+2l'-2\varpi')$$

(76) $$+n'^2\varepsilon a^2\left(\tfrac{9}{8}ee'^2-\tfrac{27}{4}ee'^2\gamma'^2\right)\cos(l-\varpi-2l'+2\varpi')$$

(77) $$+n'^2\varepsilon a^2\left(\tfrac{3}{16}e^2e'-\tfrac{9}{8}e^2e'\gamma'^2\right)\cos(2l-2\varpi+l'-\varpi')$$

(78) $$+n'^2\varepsilon a^2\left(\tfrac{3}{16}e^2e'-\tfrac{9}{8}e^2e'\gamma'^2\right)\cos(2l-2\varpi-l'+\varpi')$$

(79) $$+n'^2\varepsilon a^2\left(\tfrac{1}{16}e^3-\tfrac{3}{8}e^3\gamma'^2\right)\cos(3l-3\varpi)$$

(80) $$+n'^2\varepsilon a^2\left(-\tfrac{1}{64}e'^3+\tfrac{1}{32}e'^3\gamma'^2\right)\cos(2l+l'-3\varpi')$$

(81) $$+n'^2\varepsilon a^2\left(-\tfrac{845}{64}e'^3+\tfrac{845}{32}e'^3\gamma'^2\right)\cos(2l-5l'+3\varpi')$$

(82) $$+n'^2\varepsilon a^2\left(\tfrac{153}{8}ee'^2-\tfrac{153}{4}ee'^2\gamma'^2\right)\cos(l+\varpi-4l'+2\varpi')$$

(83) $$+n'^2\varepsilon a^2\left(-\tfrac{51}{8}ee'^2+\tfrac{51}{4}ee'^2\gamma'^2\right)\cos(3l-\varpi-4l'+2\varpi')$$

(84) $$+n'^2\varepsilon a^2\left(\tfrac{15}{16}e^2e'-\tfrac{15}{8}e^2e'\gamma'^2\right)\cos(-2\varpi+l'+\varpi')$$

(85) $$+n'^2\varepsilon a^2\left(-\tfrac{105}{16}e^2e'+\tfrac{105}{8}e^2e'\gamma'^2\right)\cos(-2\varpi+3l'-\varpi')$$

(86) $$+n'^2\varepsilon a^2\left(\tfrac{3}{8}e^2e'-\tfrac{3}{4}e^2e'\gamma'^2\right)\cos(4l-2\varpi-l'-\varpi')$$

$$(87) \quad + n'^2 \varepsilon a^2 \left(-\frac{21}{8} e^2 e' + \frac{21}{4} e^2 e' \gamma'^2 \right) \cos(4l - 2\varpi - 3l' + \varpi')$$

$$(88) \quad + n'^2 \varepsilon a^2 \left(\frac{7}{32} e^3 - \frac{7}{16} e^3 \gamma'^2 \right) \cos(l - 3\varpi + 2l')$$

$$(89) \quad + n'^2 \varepsilon a^2 \left(\frac{25}{32} e^3 + \frac{25}{16} e^3 \gamma'^2 \right) \cos(5l - 3\varpi - 2l')$$

$$(90) \quad + n'^2 \varepsilon a^2 \left(-\frac{9}{4} e' \gamma^2 + \frac{27}{2} e' \gamma^2 \gamma'^2 \right) \cos(2l - 2\theta + l' - \varpi')$$

$$(91) \quad + n'^2 \varepsilon a^2 \left(-\frac{9}{4} e' \gamma^2 + \frac{27}{2} e' \gamma^2 \gamma'^2 \right) \cos(2l - 2\theta - l' + \varpi')$$

$$(92) \quad + n'^2 \varepsilon a^2 \left(\frac{9}{2} e \gamma^2 - 27 e \gamma^2 \gamma'^2 \right) \cos(l + \varpi - 2\theta)$$

$$(93) \quad + n'^2 \varepsilon a^2 \left(-\frac{3}{2} e \gamma^2 + 9 e \gamma^2 \gamma'^2 \right) \cos(3l - \varpi - 2\theta)$$

$$(94) \quad + n'^2 \varepsilon a^2 \left(\frac{3}{4} e' \gamma^2 - \frac{3}{2} e' \gamma^2 \gamma'^2 \right) \cos(-2\theta + l' + \varpi')$$

$$(95) \quad + n'^2 \varepsilon a^2 \left(-\frac{21}{4} e' \gamma^2 + \frac{21}{2} e' \gamma^2 \gamma'^2 \right) \cos(-2\theta + 3l' - \varpi')$$

$$(96) \quad + n'^2 \varepsilon a^2 \left(\frac{3}{2} e \gamma^2 - 3 e \gamma^2 \gamma'^2 \right) \cos(l - \varpi - 2\theta + 2l')$$

$$(97) \quad + n'^2 \varepsilon a^2 \left(\frac{3}{2} e \gamma^2 - 3 e \gamma^2 \gamma'^2 \right) \cos(l - \varpi + 2\theta - 2l')$$

$$(98) \quad + n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} \left(-\frac{3}{8} e' + \frac{33}{8} e' \gamma'^2 \right) \cos(l - \varpi')$$

$$(99) \quad + n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} \left(-\frac{9}{8} e' + \frac{99}{8} e' \gamma'^2 \right) \cos(l - 2l' + \varpi')$$

$$(100) \quad + n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} \left(\frac{15}{16} e - \frac{165}{16} e \gamma'^2 \right) \cos(-\varpi + l')$$

$$(101) \quad + n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} \left(\frac{3}{16} e - \frac{33}{16} e \gamma'^2 \right) \cos(2l - \varpi - l')$$

$$(102) \quad + n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} \left(\frac{5}{8} e' - \frac{15}{8} e' \gamma'^2 \right) \cos(3l - 2l' - \varpi')$$

$$(103) \quad + n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} \left(-\frac{25}{8} e' + \frac{75}{8} e' \gamma'^2 \right) \cos(3l - 4l' + \varpi')$$

$$(104) \quad + n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} \left(\frac{45}{16} e - \frac{135}{16} e \gamma'^2 \right) \cos(2l + \varpi - 3l')$$

$$(105) \quad + n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} \left(-\frac{15}{16} e + \frac{45}{16} e \gamma'^2 \right) \cos(4l - \varpi - 3l')$$

$$(106) \quad -\frac{51}{2} n'^2 \varepsilon a^2 e'^2 \gamma \gamma' \cos(2l - \theta - 4l' + 2\varpi' + \theta')$$

(107) $-\frac{9}{2}n'^2\varepsilon a^2 ee'\gamma\gamma' \cos(l+\varpi-\theta-l'-\varpi'+\theta')$

(108) $+\frac{63}{2}n'^2\varepsilon a^2 ee'\gamma\gamma' \cos(l+\varpi-\theta-3l'+\varpi'+\theta')$

(109) $+\frac{3}{2}n'^2\varepsilon a^2 ee'\gamma\gamma' \cos(3l-\varpi-\theta-l'-\varpi'+\theta')$

(110) $-\frac{21}{2}n'^2\varepsilon a^2 ee'\gamma\gamma' \cos(3l-\varpi-\theta-3l'+\varpi'+\theta')$

(111) $-\frac{15}{2}n'^2\varepsilon a^2 e^2\gamma\gamma' \cos(-2\varpi+\theta+2l'-\theta')$

(112) $-3n'^2\varepsilon a^2 e^2\gamma\gamma' \cos(4l-2\varpi-\theta-2l'+\theta')$

(113) $-\frac{27}{4}n'^2\varepsilon a^2 e'^2\gamma\gamma' \cos(\theta+2l'-2\varpi'-\theta')$

(114) $-\frac{27}{4}n'^2\varepsilon a^2 e'^2\gamma\gamma' \cos(-\theta+2l'-2\varpi'+\theta')$

(115) $+\frac{9}{2}n'^2\varepsilon a^2 ee'\gamma\gamma' \cos(l-\varpi+\theta+l'-\varpi'-\theta')$

(116) $+\frac{9}{2}n'^2\varepsilon a^2 ee'\gamma\gamma' \cos(l-\varpi+\theta-l'+\varpi'-\theta')$

(117) $+\frac{9}{2}n'^2\varepsilon a^2 ee'\gamma\gamma' \cos(l-\varpi-\theta+l'-\varpi'+\theta')$

(118) $+\frac{9}{2}n'^2\varepsilon a^2 ee'\gamma\gamma' \cos(l-\varpi-\theta-l'+\varpi'+\theta')$

(119) $+\frac{3}{4}n'^2\varepsilon a^2 e^2\gamma\gamma' \cos(2l-2\varpi+\theta-\theta')$

(120) $+\frac{3}{4}n'^2\varepsilon a^2 e^2\gamma\gamma' \cos(2l-2\varpi-\theta+\theta')$

(121) $+\frac{27}{4}n'^2\varepsilon a^2 e'^2\gamma\gamma' \cos(2l-\theta+2l'-2\varpi'-\theta')$

(122) $+\frac{27}{4}n'^2\varepsilon a^2 e'^2\gamma\gamma' \cos(2l-\theta-2l'+2\varpi'-\theta')$

(123) $-\frac{27}{2}n'^2\varepsilon a^2 ee'\gamma\gamma' \cos(l+\varpi-\theta+l'-\varpi'-\theta')$

(124) $-\frac{27}{2}n'^2\varepsilon a^2 ee'\gamma\gamma' \cos(l+\varpi-\theta-l'+\varpi'-\theta')$

(125) $+\frac{9}{2}n'^2\varepsilon a^2 ee'\gamma\gamma' \cos(3l-\varpi-\theta+l'-\varpi'-\theta')$

(126) $+\frac{9}{2}n'^2\varepsilon a^2 ee'\gamma\gamma' \cos(3l-\varpi-\theta-l'+\varpi'-\theta')$

(127) $+\frac{15}{2}n'^2\varepsilon a^2e^2\gamma\gamma'\cos(2\varpi-\theta-\theta')$

(128) $+3n'^2\varepsilon a^2e^2\gamma\gamma'\cos(4l-2\varpi-\theta-\theta')$

(129) $+\frac{51}{2}n'^2\varepsilon a^2e'^2\gamma\gamma'\cos(-\theta+4l'-2\varpi'-\theta')$

(130) $+\frac{3}{2}n'^2\varepsilon a^2ee'\gamma\gamma'\cos(l-\varpi-\theta+l'+\varpi'-\theta')$

(131) $-\frac{21}{2}n'^2\varepsilon a^2ee'\gamma\gamma'\cos(l-\varpi-\theta+3l'-\varpi'-\theta')$

(132) $+\frac{3}{2}n'^2\varepsilon a^2ee'\gamma\gamma'\cos(l-\varpi+\theta-l'-\varpi'+\theta')$

(133) $-\frac{21}{2}n'^2\varepsilon a^2ee'\gamma\gamma'\cos(l-\varpi+\theta-3l'+\varpi'+\theta)$

(134) $-\frac{3}{4}n'^2\varepsilon a^2e^2\gamma\gamma'\cos(2l-2\varpi-\theta+2l'-\theta')$

(135) $-\frac{3}{4}n'^2\varepsilon a^2e^2\gamma\gamma'\cos(2l-2\varpi+\theta-2l'+\theta')$

(136) $-3n'^2\varepsilon a^2\gamma^3\gamma'\cos(2l-3\theta+\theta')$

(137) $+3n'^2\varepsilon a^2\gamma^3\gamma'\cos(2l-3\theta+2l'-\theta')$

(138) $-\frac{9}{2}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}\gamma\gamma'\cos(l-\theta-l'+\theta')$

(139) $-\frac{15}{4}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}\gamma\gamma'\cos(l+\theta-l'-\theta')$

(140) $-\frac{15}{4}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}\gamma\gamma'\cos(3l-\theta-3l'+\theta')$

(141) $+\frac{9}{2}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}\gamma\gamma'\cos(l-\theta+l'-\theta')$

(142) $+\frac{15}{4}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}\gamma\gamma'\cos(l+\theta-3l'+\theta')$

(143) $+\frac{15}{4}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}\gamma\gamma'\cos(3l-\theta-l'-\theta')$

(144) $+\frac{9}{4}n'^2\varepsilon a^2e'\gamma^2\gamma'^2\cos(2l-2\theta-l'-\varpi'+2\theta')$

(145) $-\frac{63}{4}n'^2\varepsilon a^2e'\gamma^2\gamma'^2\cos(2l-2\theta-3l'+\varpi'+2\theta')$

(146) $+\frac{27}{2}n'^2\varepsilon a^2e\gamma^2\gamma'^2\cos(l+\varpi-2\theta-2l'+2\theta')$

(147) $-\frac{9}{2}n'^2\varepsilon a^2 e\gamma^2\gamma'^2 \cos(3l-\varpi-2\theta-2l'+2\theta')$

(148) $+\frac{9}{4}n'^2\varepsilon a^2 e'\gamma^2\gamma'^2 \cos(2l-2\theta+l'+\varpi'-2\theta')$

(149) $-\frac{63}{4}n'^2\varepsilon a^2 e'\gamma^2\gamma'^2 \cos(2l-2\theta+3l'-\varpi'-2\theta')$

(150) $+\frac{27}{2}n'^2\varepsilon a^2 e\gamma^2\gamma'^2 \cos(l+\varpi-2\theta+2l'-2\theta')$

(151) $-\frac{9}{2}n'^2\varepsilon a^2 e\gamma^2\gamma'^2 \cos(3l-\varpi-2\theta+2l'-2\theta')$

(152) $-\frac{9}{2}n'^2\varepsilon a^2 e'\gamma^2\gamma'^2 \cos(2\theta+l'-\varpi'-2\theta')$

(153) $-\frac{9}{2}n'^2\varepsilon a^2 e'\gamma^2\gamma'^2 \cos(-2\theta+l'-\varpi'+2\theta')$

(154) $+3n'^2\varepsilon a^2 e\gamma^2\gamma'^2 \cos(l-\varpi+2\theta-2\theta')$

(155) $+3n'^2\varepsilon a^2 e\gamma^2\gamma'^2 \cos(l-\varpi-2\theta+2\theta')$

(156) $-\frac{159}{32}n'^2\varepsilon a^2 e'^3\gamma'^2 \cos(2l+3l'-3\varpi'-2\theta')$

(157) $+\frac{159}{32}n'^2\varepsilon a^2 e'^3\gamma'^2 \cos(2l-3l'+3\varpi'-2\theta')$

(158) $+\frac{81}{8}n'^2\varepsilon a^2 e e'^2\gamma'^2 \cos(l+\varpi+2l'-2\varpi'-2\theta')$

(159) $+\frac{81}{8}n'^2\varepsilon a^2 e e'^2\gamma'^2 \cos(l+\varpi-2l'+2\varpi'-2\theta')$

(160) $-\frac{27}{8}n'^2\varepsilon a^2 e e'^2\gamma'^2 \cos(3l-\varpi+2l'-2\varpi'-2\theta')$

(161) $-\frac{27}{8}n'^2\varepsilon a^2 e e'^2\gamma'^2 \cos(3l-\varpi-2l'+2\varpi'-2\theta')$

(162) $-\frac{45}{8}n'^2\varepsilon a^2 e^2 e'\gamma'^2 \cos(2\varpi+l'-\varpi'-2\theta')$

(163) $-\frac{45}{8}n'^2\varepsilon a^2 e^2 e'\gamma'^2 \cos(-2\varpi+l'-\varpi'+2\theta')$

(164) $-\frac{9}{4}n'^2\varepsilon a^2 e^2 e'\gamma'^2 \cos(4l-2\varpi+l'-\varpi'-2\theta')$

(165) $-\frac{9}{4}n'^2\varepsilon a^2 e^2 e'\gamma'^2 \cos(4l-2\varpi-l'+\varpi'-2\theta')$

(166) $+\frac{7}{16}n'^2\varepsilon a^2 e^3\gamma'^2 \cos(l-3\varpi+2\theta')$

(167) $-\frac{25}{16} n'^2 \varepsilon a^2 e^3 \gamma'^2 \cos(5l - 3\varpi - 2\theta')$

(168) $-\frac{1}{32} n'^2 \varepsilon a^2 e'^3 \gamma'^2 \cos(l' - 3\varpi' + 2\theta')$

(169) $-\frac{845}{32} n'^2 \varepsilon a^2 e'^3 \gamma'^2 \cos(5l' - 3\varpi' - 2\theta')$

(170) $+\frac{51}{4} n'^2 \varepsilon a^2 e e'^2 \gamma'^2 \cos(l - \varpi + 4l' - 2\varpi' - 2\theta')$

(171) $+\frac{51}{4} n'^2 \varepsilon a^2 e e'^2 \gamma'^2 \cos(l - \varpi - 4l' + 2\varpi' + 2\theta')$

(172) $-\frac{3}{16} n'^2 \varepsilon a^2 e^2 e' \gamma'^2 \cos(2l - 2\varpi + l' + \varpi' - 2\theta')$

(173) $+\frac{21}{16} n'^2 \varepsilon a^2 e^2 e' \gamma'^2 \cos(2l - 2\varpi + 3l' - \varpi' - 2\theta')$

(174) $-\frac{3}{16} n'^2 \varepsilon a^2 e^2 e' \gamma'^2 \cos(2l - 2\varpi - l' - \varpi' + 2\theta')$

(175) $+\frac{21}{16} n'^2 \varepsilon a^2 e^2 e' \gamma'^2 \cos(2l - 2\varpi - 3l' + \varpi' + 2\theta')$

(176) $+\frac{3}{16} n'^2 \varepsilon a^2 e^3 \gamma'^2 \cos(3l - 3\varpi + 2l' - 2\theta')$

(177) $+\frac{3}{16} n'^2 \varepsilon a^2 e^3 \gamma'^2 \cos(3l - 3\varpi - 2l' + 2\theta')$

(178) $-\frac{9}{4} n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} e' \gamma'^2 \cos(l + \varpi' - 2\theta')$

(179) $-\frac{27}{4} n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} e' \gamma'^2 \cos(l + 2l' - \varpi' - 2\theta')$

(180) $+\frac{45}{8} n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} e \gamma'^2 \cos(\varpi + l' - 2\theta')$

(181) $+\frac{9}{8} n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} e \gamma'^2 \cos(2l - \varpi + l' - 2\theta')$

(182) $+\frac{15}{8} n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} e' \gamma'^2 \cos(l - 2l' - \varpi' + 2\theta')$

(183) $-\frac{75}{8} n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} e' \gamma'^2 \cos(l - 4l' + \varpi' + 2\theta')$

(184) $+\frac{75}{16} n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} e \gamma'^2 \cos(-\varpi + 3l' - 2\theta')$

(185) $+\frac{15}{16} n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} e \gamma'^2 \cos(2l - \varpi - 3l' + 2\theta')$

(186) $-\frac{15}{8} n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} e' \gamma'^2 \cos(3l - \varpi' - 2\theta')$

(187) $-\frac{45}{8} n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} e' \gamma'^2 \cos(3l - 2l' + \varpi' - 2\theta')$

(188) $+\frac{135}{16} n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} e \gamma'^2 \cos(2l + \varpi - l' - 2\theta')$

(189) $-\frac{45}{16} n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} e \gamma'^2 \cos(4l - \varpi - l' - 2\theta')$

(190) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \left(-\frac{77}{32} e'^4 + \frac{231}{16} e'^4 \gamma'^2\right) \cos(4l' - 4\varpi')$

(191) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \left(\frac{53}{32} e e'^3 - \frac{159}{16} e e'^3 \gamma'^2\right) \cos(l - \varpi + 3l' - 3\varpi')$

(192) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \left(\frac{53}{32} e e'^3 - \frac{159}{16} e e'^3 \gamma'^2\right) \cos(l - \varpi - 3l' + 3\varpi')$

(193) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \left(\frac{9}{32} e^2 e'^2 - \frac{27}{16} e^2 e'^2 \gamma'^2\right) \cos(2l - 2\varpi + 2l' - 2\varpi')$

(194) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \left(\frac{9}{32} e^2 e'^2 - \frac{27}{16} e^2 e'^2 \gamma'^2\right) \cos(2l - 2\varpi - 2l' + 2\varpi')$

(195) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \left(\frac{3}{32} e^3 e' - \frac{9}{16} e^3 e' \gamma'^2\right) \cos(3l - 3\varpi + l' - \varpi')$

(196) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \left(\frac{3}{32} e^3 e' - \frac{9}{16} e^3 e' \gamma'^2\right) \cos(3l - 3\varpi - l' + \varpi')$

(197) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \left(\frac{1}{24} e^4 - \frac{1}{4} e^4 \gamma'^2\right) \cos(4l - 4\varpi)$

(198) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \left(-\frac{1}{32} e'^4 + \frac{1}{16} e'^4 \gamma'^2\right) \cos(2l + 2l' - 4\varpi')$

(199) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \left(-\frac{1599}{64} e'^4 + \frac{1599}{32} e'^4 \gamma'^2\right) \cos(2l - l' + 4\varpi')$

(200) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \left(\frac{3}{64} e e'^3 - \frac{3}{32} e e'^3 \gamma'^2\right) \cos(l + \varpi + l' - 3\varpi')$

(201) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \left(\frac{2535}{64} e e'^3 - \frac{2535}{32} e e'^3 \gamma'^2\right) \cos(l + \varpi - 5l' + 3\varpi')$

(202) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \left(-\frac{1}{64} e e'^3 + \frac{1}{32} e e'^3 \gamma'^2\right) \cos(3l - \varpi + l' - 3\varpi')$

(203) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \left(-\frac{845}{64} e e'^3 + \frac{845}{64} e e'^3 \gamma'^2\right) \cos(3l - \varpi - 5l' + 3\varpi')$

(204) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \left(-\frac{255}{16} e^2 e'^2 + \frac{255}{8} e^2 e'^2 \gamma'^2\right) \cos(-2\varpi + 4l' - 2\varpi')$

(205) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \left(-\frac{51}{8} e^2 e'^2 + \frac{51}{4} e^2 e'^2 \gamma'^2\right) \cos(4l - 2\varpi - 4l' + 2\varpi')$

(206) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \left(-\frac{7}{64} e^3 e' + \frac{7}{32} e^3 e' \gamma'^2\right) \cos(l - 3\varpi + l' + \varpi')$

(207) $+n'^2\varepsilon a^2\left(\frac{49}{64}e^3e' - \frac{49}{32}e^3e'\gamma'^2\right)\cos(l - 3\varpi + 3l' - \varpi')$

(208) $+n'^2\varepsilon a^2\left(-\frac{25}{64}e^3e' - \frac{25}{32}e^3e'\gamma'^2\right)\cos(5l - 3\varpi - l' - \varpi')$

(209) $+n'^2\varepsilon a^2\left(\frac{175}{64}e^3e' + \frac{175}{32}e^3e'\gamma'^2\right)\cos(5l - 3\varpi - 3l' + \varpi')$

(210) $+n'^2\varepsilon a^2\left(\frac{3}{64}e^4 - \frac{3}{32}e^4\gamma'^2\right)\cos(2l - 4\varpi + 2l')$

(211) $+n'^2\varepsilon a^2\left(-\frac{27}{32}e^4 + \frac{27}{16}e^4\gamma'^2\right)\cos(6l - 4\varpi - 2l')$

(212) $+n'^2\varepsilon a^2\left(-\frac{27}{8}e'^2\gamma^2 + \frac{81}{4}e'^2\gamma^2\gamma'^2\right)\cos(2l - 2\theta + 2l' - 2\varpi')$

(213) $+n'^2\varepsilon a^2\left(-\frac{27}{8}e'^2\gamma^2 + \frac{81}{4}e'^2\gamma^2\gamma'^2\right)\cos(2l - 2\theta - 2l' + 2\varpi')$

(214) $+n'^2\varepsilon a^2\left(\frac{27}{4}ee'\gamma^2 - \frac{81}{2}ee'\gamma^2\gamma'^2\right)\cos(l + \varpi - 2\theta + l' - \varpi')$

(215) $+n'^2\varepsilon a^2\left(\frac{27}{4}ee'\gamma^2 - \frac{81}{2}ee'\gamma^2\gamma'^2\right)\cos(l + \varpi - 2\theta - l' + \varpi')$

(216) $+n'^2\varepsilon a^2\left(-\frac{9}{4}ee'\gamma^2 + \frac{27}{2}ee'\gamma^2\gamma'^2\right)\cos(3l - \varpi - 2\theta + l' - \varpi')$

(217) $+n'^2\varepsilon a^2\left(-\frac{9}{4}ee'\gamma^2 + \frac{27}{2}ee'\gamma^2\gamma'^2\right)\cos(3l - \varpi - 2\theta - l' + \varpi')$

(218) $+n'^2\varepsilon a^2\left(-\frac{15}{4}e^2\gamma^2 + \frac{45}{2}e^2\gamma^2\gamma'^2\right)\cos(2\varpi - 2\theta)$

(219) $+n'^2\varepsilon a^2\left(-\frac{3}{2}e^2\gamma^2 + 9e^2\gamma^2\gamma'^2\right)\cos(4l - 2\varpi - 2\theta)$

(220) $+n'^2\varepsilon a^2\left(-\frac{51}{4}e'^2\gamma^2 + \frac{51}{2}e'^2\gamma^2\gamma'^2\right)\cos(-2\theta + 4l' - 2\varpi')$

(221) $+n'^2\varepsilon a^2\left(-\frac{3}{4}ee'\gamma^2 + \frac{3}{2}ee'\gamma^2\gamma'^2\right)\cos(l - \varpi - 2\theta + l' + \varpi')$

(222) $+n'^2\varepsilon a^2\left(\frac{21}{4}ee'\gamma^2 - \frac{21}{2}ee'\gamma^2\gamma'^2\right)\cos(l - \varpi - 2\theta + 3l' - \varpi')$

(223) $+n'^2\varepsilon a^2\left(-\frac{3}{4}ee'\gamma^2 + \frac{3}{2}ee'\gamma^2\gamma'^2\right)\cos(l - \varpi + 2\theta - l' - \varpi')$

(224) $+n'^2\varepsilon a^2\left(\frac{21}{4}ee'\gamma^2 - \frac{21}{2}ee'\gamma^2\gamma'^2\right)\cos(l - \varpi + 2\theta - 3l' + \varpi')$

(225) $+n'^2\varepsilon a^2\left(\frac{3}{8}e^2\gamma^2 - \frac{3}{4}e^2\gamma^2\gamma'^2\right)\cos(2l - 2\varpi - 2\theta + 2l')$

(226) $+n'^2\varepsilon a^2\left(\frac{3}{8}e^2\gamma^2 - \frac{3}{4}e^2\gamma^2\gamma'^2\right)\cos(2l - 2\varpi + 2\theta - 2l')$

(227) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \left(-\frac{3}{4}\gamma^4 + \frac{3}{2}\gamma^4\gamma'^2\right) \cos(2l - 4\theta + 2l')$

(228) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} \left(-\frac{33}{64}e'^2 + \frac{363}{64}e'^2\gamma'^2\right) \cos(l + l' - 2\varpi')$

(229) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} \left(-\frac{159}{64}e'^2 + \frac{1749}{64}e'^2\gamma'^2\right) \cos(l - 3l' + 2\varpi')$

(230) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} \left(\frac{15}{16}ee' - \frac{165}{16}ee'\gamma'^2\right) \cos(\varpi - \varpi')$

(231) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} \left(\frac{45}{16}ee' - \frac{495}{16}ee'\gamma'^2\right) \cos(-\varpi + 2l' - \varpi')$

(232) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} \left(\frac{3}{16}ee' - \frac{33}{16}ee'\gamma'^2\right) \cos(2l - \varpi - \varpi')$

(233) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} \left(\frac{9}{16}ee' - \frac{99}{16}ee'\gamma'^2\right) \cos(2l - \varpi - 2l' + \varpi')$

(234) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} \left(-\frac{33}{64}e^2 + \frac{363}{64}e^2\gamma'^2\right) \cos(l - 2\varpi + l')$

(235) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} \left(\frac{9}{64}e^2 - \frac{99}{64}e^2\gamma'^2\right) \cos(3l - 2\varpi - l')$

(236) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} \left(-\frac{5}{64}e'^2 + \frac{15}{64}e'^2\gamma'^2\right) \cos(3l - l' - 2\varpi')$

(237) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} \left(-\frac{635}{64}e'^2 + \frac{1905}{64}e'^2\gamma'^2\right) \cos(3l - 5l' + 2\varpi')$

(238) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} \left(-\frac{45}{16}ee' + \frac{135}{16}ee'\gamma'^2\right) \cos(2l + \varpi - 2l' - \varpi')$

(239) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} \left(\frac{225}{16}ee' - \frac{675}{16}ee'\gamma'^2\right) \cos(2l + \varpi - 4l' + \varpi')$

(240) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} \left(\frac{15}{16}ee' - \frac{45}{16}ee'\gamma'^2\right) \cos(4l - \varpi - 2l' - \varpi')$

(241) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} \left(-\frac{75}{16}ee' + \frac{225}{16}ee'\gamma'^2\right) \cos(4l - \varpi - 4l' + \varpi')$

(242) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} \left(-\frac{285}{64}e^2 + \frac{855}{64}e^2\gamma'^2\right) \cos(l + 2\varpi - 3l')$

(243) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} \left(-\frac{75}{64}e^2 + \frac{225}{64}e^2\gamma'^2\right) \cos(5l - 2\varpi - 3l')$

(244) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} \left(-\frac{9}{4}\gamma^2 + \frac{99}{4}\gamma^2\gamma'^2\right) \cos(l - 2\theta + l')$

(245) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} \left(-\frac{15}{8}\gamma^2 + \frac{165}{8}\gamma^2\gamma'^2\right) \cos(3l - 2\theta - l')$

(246) $+ n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} \left(-\frac{15}{8}\gamma^2 + \frac{45}{8}\gamma^2\gamma'^2\right) \cos(l + 2\theta - 3l')$

(247) $+n'^2\varepsilon a^2\cdot\left(\frac{a}{a'}\right)^2\left(-\frac{35}{64}+\frac{35}{16}\gamma'^2\right)\cos(4l-4l')$

(248) $-\frac{1}{16}n'^2\varepsilon a^2e'^3\gamma\gamma'\cos(2l-\theta+l'-3\varpi'+\theta')$

(249) $-\frac{845}{16}n'^2\varepsilon a^2e'^3\gamma\gamma'\cos(2l-\theta-5l'+3\varpi'+\theta')$

(250) $+\frac{153}{2}n'^2\varepsilon a^2ee'^2\gamma\gamma'\cos(l+\varpi-\theta-4l'+2\varpi'+\theta')$

(251) $-\frac{51}{2}n'^2\varepsilon a^2ee'^2\gamma\gamma'\cos(3l-\varpi-\theta-4l'+2\varpi'+\theta')$

(252) $+\frac{15}{4}n'^2\varepsilon a^2e^2e'\gamma\gamma'\cos(-2\varpi+\theta+l'+\varpi'-\theta')$

(253) $-\frac{105}{4}n'^2\varepsilon a^2e^2e'\gamma\gamma'\cos(-2\varpi+\theta+3l'-\varpi'-\theta')$

(254) $+\frac{3}{2}n'^2\varepsilon a^2e^2e'\gamma\gamma'\cos(4l-2\varpi-\theta-l'-\varpi'+\theta')$

(255) $-\frac{21}{2}n'^2\varepsilon a^2e^2e'\gamma\gamma'\cos(4l-2\varpi-\theta-3l'+\varpi'+\theta')$

(256) $+\frac{7}{8}n'^2\varepsilon a^2e^3\gamma\gamma'\cos(l-3\varpi+\theta+2l'-\theta)$

(257) $-\frac{25}{8}n'^2\varepsilon a^2e^3\gamma\gamma'\cos(5l-3\varpi-\theta-2l'+\theta')$

(258) $-\frac{159}{16}n'^2\varepsilon a^2e'^3\gamma\gamma'\cos(\theta+3l'-3\varpi'-\theta')$

(259) $-\frac{159}{16}n'^2\varepsilon a^2e'^3\gamma\gamma'\cos(-\theta+3l'-3\varpi'+\theta')$

(260) $+\frac{27}{4}n'^2\varepsilon a^2ee'^2\gamma\gamma'\cos(l-\varpi+\theta+2l'-2\varpi'-\theta')$

(261) $+\frac{27}{4}n'^2\varepsilon a^2ee'^2\gamma\gamma'\cos(l-\varpi+\theta-2l'+2\varpi'-\theta')$

(262) $+\frac{27}{4}n'^2\varepsilon a^2ee'^2\gamma\gamma'\cos(l-\varpi-\theta+2l'-2\varpi'+\theta')$

(263) $+\frac{27}{4}n'^2\varepsilon a^2ee'^2\gamma\gamma'\cos(l-\varpi-\theta-2l'+2\varpi'+\theta')$

(264) $+\frac{9}{8}n'^2\varepsilon a^2e^2e'\gamma\gamma'\cos(2l-2\varpi+\theta+l'-\varpi'-\theta')$

(265) $+\frac{9}{8}n'^2\varepsilon a^2e^2e'\gamma\gamma'\cos(2l-2\varpi+\theta-l'+\varpi'-\theta')$

(266) $+\frac{9}{8}n'^2\varepsilon a^2e^2e'\gamma\gamma'\cos(2l-2\varpi-\theta+l'-\varpi'+\theta')$

(267) $+\frac{9}{8}n'^2\varepsilon a^2e^2e'\gamma\gamma'\cos(2l-2\varpi-\theta-l'+\varpi'+\theta')$

(268) $+\frac{3}{8}n'^2\varepsilon a^2e^3\gamma\gamma'\cos(3l-3\varpi+\theta-\theta')$

(269) $+\frac{3}{8}n'^2\varepsilon a^2e^3\gamma\gamma'\cos(3l-3\varpi-\theta+\theta')$

(270) $+\frac{159}{16}n'^2\varepsilon a^2e'^3\gamma\gamma'\cos(2l-\theta+3l'-3\varpi'-\theta')$

(271) $+\frac{159}{16}n'^2\varepsilon a^2e'^3\gamma\gamma'\cos(2l-\theta-3l'+3\varpi'-\theta')$

(272) $-\frac{81}{4}n'^2\varepsilon a^2ee'^2\gamma\gamma'\cos(l+\varpi-\theta+2l'-2\varpi'-\theta')$

(273) $-\frac{81}{4}n'^2\varepsilon a^2ee'^2\gamma\gamma'\cos(l+\varpi-\theta-2l'+2\varpi'-\theta')$

(274) $+\frac{27}{4}n'^2\varepsilon a^2ee'^2\gamma\gamma'\cos(3l-\varpi-\theta+2l'-2\varpi'-\theta')$

(275) $+\frac{27}{4}n'^2\varepsilon a^2ee'^2\gamma\gamma'\cos(3l-\varpi-\theta-2l'+2\varpi'-\theta')$

(276) $+\frac{45}{4}n'^2\varepsilon a^2e^2e'\gamma\gamma'\cos(2\varpi-\theta+l'-\varpi'-\theta')$

(277) $+\frac{45}{4}n'^2\varepsilon a^2e^2e'\gamma\gamma'\cos(-2\varpi+\theta+l'-\varpi'+\theta')$

(278) $+\frac{9}{2}n'^2\varepsilon a^2e^2e'\gamma\gamma'\cos(4l-2\varpi-\theta+l'-\varpi'-\theta')$

(279) $+\frac{9}{2}n'^2\varepsilon a^2e^2e'\gamma\gamma'\cos(4l-2\varpi-\theta-l'+\varpi'-\theta')$

(280) $-\frac{7}{8}n'^2\varepsilon a^2e^3\gamma\gamma'\cos(l-3\varpi+\theta+\theta')$

(281) $+\frac{25}{8}n'^2\varepsilon a^2e^3\gamma\gamma'\cos(5l-3\varpi-\theta-\theta')$

(282) $+\frac{1}{16}n'^2\varepsilon a^2e'^3\gamma\gamma'\cos(\theta+l'-3\varpi'+\theta')$

(283) $+\frac{845}{16}n'^2\varepsilon a^2e'^3\gamma\gamma'\cos(-\theta+5l'-3\varpi'-\theta')$

(284) $-\frac{51}{2}n'^2\varepsilon a^2ee'^2\gamma\gamma'\cos(l-\varpi-\theta+4l'-2\varpi'-\theta')$

(285) $-\frac{51}{2}n'^2\varepsilon a^2ee'^2\gamma\gamma'\cos(l-\varpi+\theta-4l'+2\varpi'+\theta')$

(286) $+\frac{3}{8}n'^2\varepsilon a^2e^2e'\gamma\gamma'\cos(2l-3\varpi-\theta+l'+\varpi'-\theta')$

(287) $-\frac{21}{8} n'^2 \varepsilon a^2 e^2 e' \gamma \gamma' \cos(2l - 2\varpi - \theta + 3l' - \varpi' - \theta')$

(288) $+\frac{3}{8} n'^2 \varepsilon a^2 e^2 e' \gamma \gamma' \cos(2l - 2\varpi + \theta - l' - \varpi' + \theta')$

(289) $-\frac{21}{8} n'^2 \varepsilon a^2 e^2 e' \gamma \gamma' \cos(2l - 2\varpi + \theta - 3l' + \varpi' + \theta')$

(290) $-\frac{3}{8} n'^2 \varepsilon a^2 e^3 \gamma \gamma' \cos(3l - 3\varpi - \theta + 2l' - \theta')$

(291) $-\frac{3}{8} n'^2 \varepsilon a^2 e^3 \gamma \gamma' \cos(3l - 3\varpi + \theta - 2l' + \theta')$

(292) $-\frac{9}{2} n'^2 \varepsilon a^2 e' \gamma^3 \gamma' \cos(2l - 3\theta + l' - \varpi' + \theta')$

(293) $-\frac{9}{2} n'^2 \varepsilon a^2 e' \gamma^3 \gamma' \cos(2l - 3\theta - l' + \varpi' + \theta')$

(294) $+9 n'^2 \varepsilon a^2 e \gamma^3 \gamma' \cos(l + \varpi - 3\theta + \theta')$

(295) $-3 n'^2 \varepsilon a^2 e \gamma^3 \gamma' \cos(3l - \varpi - 3\theta + \theta')$

(296) $-\frac{3}{2} n'^2 \varepsilon a^2 e' \gamma^3 \gamma' \cos(2l - 3\theta + l' + \varpi' - \theta')$

(297) $+\frac{21}{2} n'^2 \varepsilon a^2 e' \gamma^3 \gamma' \cos(2l - 3\theta + 3l' - \varpi' - \theta')$

(298) $-9 n'^2 \varepsilon a^2 e \gamma^3 \gamma' \cos(l + \varpi - 3\theta + 2l' - \theta')$

(299) $+3 n'^2 \varepsilon a^2 e \gamma^3 \gamma' \cos(3l - \varpi - 3\theta + 2l' - \theta')$

(300) $-\frac{9}{2} n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} e' \gamma \gamma' \cos(l - \theta - \varpi' + \theta')$

(301) $-\frac{27}{2} n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} e' \gamma \gamma' \cos(l - \theta - 2l' + \varpi' + \theta')$

(302) $+\frac{45}{4} n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} e \gamma \gamma' \cos(-\varpi + \theta + l' - \theta')$

(303) $+\frac{9}{4} n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} e \gamma \gamma' \cos(2l - \varpi - \theta - l' + \theta')$

(304) $-\frac{15}{4} n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} e' \gamma \gamma' \cos(l + \theta - \varpi' - \theta')$

(305) $-\frac{45}{4} n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} e' \gamma \gamma' \cos(l + \theta - 2l' + \varpi' - \theta')$

(306) $+\frac{75}{8} n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} e \gamma \gamma' \cos(-\varpi - \theta + l' + \theta')$

(307) $+\frac{15}{8}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}e\gamma\gamma'\cos(2l-\varpi+\theta-l'-\theta')$

(308) $+\frac{15}{4}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}e'\gamma\gamma'\cos(3l-\theta-2l'-\varpi'+\theta')$

(309) $-\frac{75}{4}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}e'\gamma\gamma'\cos(3l-\theta-4l'+\varpi'+\theta')$

(310) $+\frac{135}{8}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}e\gamma\gamma'\cos(2l+\varpi-\theta-3l'+\theta')$

(311) $-\frac{45}{8}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}e\gamma\gamma'\cos(4l-\varpi-\theta-3l'+\theta')$

(312) $+\frac{9}{2}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}e'\gamma\gamma'\cos(l-\theta+\varpi'-\theta')$

(313) $+\frac{27}{2}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}e'\gamma\gamma'\cos(l-\theta+2l'-\varpi'-\theta')$

(314) $-\frac{45}{4}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}e\gamma\gamma'\cos(\varpi-\theta+l'-\theta')$

(315) $-\frac{9}{4}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}e\gamma\gamma'\cos(2l-\varpi-\theta+l'-\theta')$

(316) $-\frac{15}{4}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}e'\gamma\gamma'\cos(l+\theta-2l'-\varpi'+\theta')$

(317) $+\frac{75}{4}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}e'\gamma\gamma'\cos(l+\theta-4l'+\varpi'+\theta')$

(318) $-\frac{75}{8}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}e\gamma\gamma'\cos(-\varpi-\theta+3l'-\theta')$

(319) $-\frac{15}{8}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}e\gamma\gamma'\cos(2l-\varpi+\theta-3l'+\theta')$

(320) $+\frac{15}{4}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}e'\gamma\gamma'\cos(3l-\theta-\varpi'-\theta')$

(321) $+\frac{45}{4}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}e'\gamma\gamma'\cos(3l-\theta-2l'+\varpi'-\theta')$

(322) $-\frac{135}{8}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}e\gamma\gamma'\cos(2l+\varpi-\theta-l'-\theta')$

(323) $+\frac{45}{8}n'\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{n'}e\gamma\gamma'\cos(4l-\varpi-\theta-l'-\theta')$

(324) $-\frac{153}{4}n'^2\varepsilon a^2e'^2\gamma^2\gamma'^2\cos(2l-2\theta-4l'+2\varpi'+2\theta')$

(325) $-\frac{27}{4}n^2\varepsilon a^2ee'\gamma^2\gamma'^2\cos(l+\varpi-2\theta-l'-\varpi'+2\theta')$

(326) $+\frac{189}{4}n'^2\varepsilon a^2ee'\gamma^2\gamma'^2\cos(l+\varpi-2\theta-3l'+\varpi'+2\theta')$

(327) $+\frac{9}{4} n'^2 \varepsilon a^2 e e' \gamma^2 \gamma'^2 \cos(3l - \varpi - 2\theta - l' - \varpi' + 2\theta')$

(328) $-\frac{63}{4} n'^2 \varepsilon a^2 e e' \gamma^2 \gamma'^2 \cos(3l - \varpi - 2\theta - 3l' + \varpi' + 2\theta')$

(329) $-\frac{45}{4} n'^2 \varepsilon a^2 e^2 \gamma^2 \gamma'^2 \cos(-2\varpi + 2\theta + 2l' - 2\theta')$

(330) $-\frac{9}{2} n'^2 \varepsilon a^2 e^2 \gamma^2 \gamma'^2 \cos(4l - 2\varpi - 2\theta - 2l' + 2\theta')$

(331) $\frac{153}{4} n'^2 \varepsilon a^2 e'^2 \gamma^2 \gamma'^2 \cos(2l - 2\theta + 4l' - 2\varpi' - 2\theta')$

(332) $-\frac{27}{4} n'^2 \varepsilon a^2 e e' \gamma^2 \gamma'^2 \cos(l + \varpi - 2\theta + l' + \varpi' - 2\theta')$

(333) $+\frac{189}{4} n'^2 \varepsilon a^2 e e' \gamma^2 \gamma'^2 \cos(l + \varpi - 2\theta + 3l' - \varpi' - 2\theta')$

(334) $+\frac{9}{4} n'^2 \varepsilon a^2 e e' \gamma^2 \gamma'^2 \cos(3l - \varpi - 2\theta + l' + \varpi' - 2\theta')$

(335) $\frac{63}{4} n'^2 \varepsilon a^2 e e' \gamma^2 \gamma'^2 \cos(3l - \varpi - 2\theta + 3l' - \varpi' - 2\theta')$

(336) $-\frac{45}{4} n'^2 \varepsilon a^2 e^2 \gamma^2 \gamma'^2 \cos(2\varpi - 2\theta + 2l' - 2\theta')$

(337) $-\frac{9}{2} n'^2 \varepsilon a^2 e^2 \gamma^2 \gamma'^2 \cos(4l - 2\varpi - 2\theta + 2l' - 2\theta')$

(338) $-\frac{27}{4} n'^2 \varepsilon a^2 e'^2 \gamma^2 \gamma'^2 \cos(2\theta + 2l' - 2\varpi' - 2\theta')$

(339) $-\frac{27}{4} n'^2 \varepsilon a^2 e'^2 \gamma^2 \gamma'^2 \cos(-2\theta + 2l' - 2\varpi' + 2\theta')$

(340) $+\frac{9}{2} n'^2 \varepsilon a^2 e e' \gamma^2 \gamma'^2 \cos(l - \varpi + 2\theta + l' - \varpi' - 2\theta')$

(341) $+\frac{9}{2} n'^2 \varepsilon a^2 e e' \gamma^2 \gamma'^2 \cos(l - \varpi + 2\theta - l' + \varpi' - 2\theta')$

(342) $+\frac{9}{2} n'^2 \varepsilon a^2 e e' \gamma^2 \gamma'^2 \cos(l - \varpi - 2\theta + l' - \varpi' + 2\theta')$

(343) $+\frac{9}{2} n'^2 \varepsilon a^2 e e' \gamma^2 \gamma'^2 \cos(l - \varpi - 2\theta - l' + \varpi' + 2\theta')$

(344) $+\frac{3}{4} n'^2 \varepsilon a^2 e^2 \gamma^2 \gamma'^2 \cos(2l - 2\varpi + 2\theta - 2\theta')$

(345) $+\frac{3}{4} n'^2 \varepsilon a^2 e^2 \gamma^2 \gamma'^2 \cos(2l - 2\varpi - 2\theta + 2\theta')$

(346) $-\frac{231}{32} n'^2 \varepsilon a^2 e'^4 \gamma'^2 \cos(2l + 4l' - 4\varpi' - 2\theta')$

(347) $-\frac{231}{32} n'^2 \varepsilon a^2 e'^4 \gamma'^2 \cos(2l - 4l' + 4\varpi' - 2\theta')$

(348) $+\frac{477}{32} n'^2 \varepsilon a^2 e e'^3 \gamma'^2 \cos(l + \varpi + 3l' - 3\varpi' - 2\theta')$

(349) $+\frac{477}{32} n'^2 \varepsilon a^2 e e'^3 \gamma'^2 \cos(l + \varpi - 3l' + 3\varpi' - 2\theta')$

(350) $-\frac{159}{32} n'^2 \varepsilon a^2 e e'^3 \gamma'^2 \cos(3l - \varpi + 3l' - 3\varpi' - 2\theta')$

(351) $-\frac{159}{32} n'^2 \varepsilon a^2 e e'^3 \gamma'^2 \cos(3l - \varpi - 3l' + 3\varpi' - 2\theta')$

(352) $\frac{135}{16} n'^2 \varepsilon a^2 e^2 e'^2 \gamma'^2 \cos(2\varpi + 2l' - 2\varpi' - 2\theta')$

(353) $-\frac{135}{16} n'^2 \varepsilon a^2 e^2 e'^2 \gamma'^2 \cos(-2\varpi + 2l' - 2\varpi' + 2\theta')$

(354) $-\frac{27}{8} n'^2 \varepsilon a^2 e^2 e'^2 \gamma'^2 \cos(4l - 2\varpi + 2l' - 2\varpi' - 2\theta')$

(355) $-\frac{27}{8} n'^2 \varepsilon a^2 e^2 e'^2 \gamma'^2 \cos(4l - 2\varpi - 2l' + 2\varpi' - 2\theta')$

(356) $+\frac{21}{32} n'^2 \varepsilon a^2 e^3 e' \gamma'^2 \cos(l - 3\varpi + l' - \varpi' + 2\theta')$

(357) $+\frac{21}{32} n'^2 \varepsilon a^2 e^3 e' \gamma'^2 \cos(l - 3\varpi - l' + \varpi' + 2\theta')$

(358) $-\frac{75}{32} n'^2 \varepsilon a^2 e^3 e' \gamma'^2 \cos(5l - 3\varpi + l' - \varpi' - 2\theta')$

(359) $-\frac{75}{32} n'^2 \varepsilon a^2 e^3 e' \gamma'^2 \cos(5l - 3\varpi - l' + \varpi' - 2\theta')$

(360) $+\frac{3}{32} n'^2 \varepsilon a^2 e^4 \gamma'^2 \cos(2l - 4\varpi + 2\theta')$

(361) $-\frac{27}{16} n'^2 \varepsilon a^2 e^4 \gamma'^2 \cos(6l - 4\varpi - 2\theta')$

(362) $-\frac{1}{16} n'^2 \varepsilon a^2 e'^4 \gamma'^2 \cos(2l' - 4\varpi' + 2\theta')$

(363) $-\frac{1599}{32} n'^2 \varepsilon a^2 e'^4 \gamma'^2 \cos(6l' - 4\varpi' - 2\theta')$

(364) $+\frac{1}{32} n'^2 \varepsilon a^2 e e'^3 \gamma'^2 \cos(l - \varpi - l' + 3\varpi' - 2\theta')$

(365) $+\frac{845}{32} n'^2 \varepsilon a^2 e e'^3 \gamma'^2 \cos(l - \varpi + 5l' - 3\varpi' - 2\theta')$

(366) $+\frac{1}{32} n'^2 \varepsilon a^2 e e'^3 \gamma'^2 \cos(l - \varpi + l' - 3\varpi' + 2\theta')$

(367) $+\frac{845}{32} n'^2 \varepsilon a^2 e e'^3 \gamma'^2 \cos(l - \varpi - 5l' + 3\varpi' + 2\theta')$

(368) $+\frac{51}{16} n'^2 \varepsilon a^2 e^2 e'^2 \gamma'^2 \cos(2l - 2\varpi + 4l' - 2\varpi' - 2\theta')$

(369) $+\frac{51}{16} n'^2 \varepsilon a^2 e^2 e'^2 \gamma'^2 \cos(2l - 2\varpi - 4l' + 2\varpi' + 2\theta')$

(370) $-\frac{3}{32} n'^2 \varepsilon a^2 e^3 e' \gamma'^2 \cos(3l - 3\varpi + l' + \varpi' - 2\theta')$

(371) $+\frac{21}{32} n'^2 \varepsilon a^2 e^3 e' \gamma'^2 \cos(3l - 3\varpi + 3l' - \varpi' - 2\theta')$

(372) $-\frac{3}{32} n'^2 \varepsilon a^2 e^3 e' \gamma'^2 \cos(3l - 3\varpi - l' - \varpi' + 2\theta')$

(373) $+\frac{21}{32} n'^2 \varepsilon a^2 e^3 e' \gamma'^2 \cos(3l - 3\varpi - 3l' + \varpi' + 2\theta')$

(374) $+\frac{1}{8} n'^2 \varepsilon a^2 e^4 \gamma'^2 \cos(4l - 4\varpi + 2l' - 2\theta')$

(375) $+\frac{1}{8} n'^2 \varepsilon a^2 e^4 \gamma'^2 \cos(4l - 4\varpi - 2l' + 2\theta')$

(376) $-\frac{3}{2} n'^2 \varepsilon a^2 \gamma^4 \gamma'^2 \cos(2l - 4\theta + 2\theta')$

(377) $-\frac{99}{32} n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} e'^2 \gamma'^2 \cos(l - l' + 2\varpi' - 2\theta')$

(378) $-\frac{477}{32} n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} e'^2 \gamma'^2 \cos(l + 3l' - 2\varpi - 2\theta')$

(379) $+\frac{45}{8} n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} e e' \gamma'^2 \cos(\varpi + \varpi' - 2\theta')$

(380) $+\frac{135}{8} n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} e e' \gamma'^2 \cos(\varpi + 2l' - \varpi' - 2\theta')$

(381) $+\frac{9}{8} n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} e e' \gamma'^2 \cos(2l - \varpi + \varpi' - 2\theta')$

(382) $+\frac{27}{8} n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} e e' \gamma'^2 \cos(2l - \varpi + 2l' - \varpi' - 2\theta')$

(383) $-\frac{99}{32} n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} e^2 \gamma'^2 \cos(l - 2\varpi - l' + 2\theta')$

(384) $+\frac{27}{32} n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} e^2 \gamma'^2 \cos(3l - 2\varpi + l' - 2\theta')$

(385) $-\frac{15}{64} n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} e'^2 \gamma'^2 \cos(l - l' - 2\varpi' + 2\theta')$

(386) $-\frac{1905}{64} n'^2 \varepsilon a^2 \cdot \frac{a}{a'} e'^2 \gamma'^2 \cos(l - 5l' + 2\varpi' + 2\theta')$

(387) $-\frac{75}{16}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}ee'\gamma'^2\cos(-\varpi+2l'+\varpi'-2\theta')$

(388) $+\frac{375}{16}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}ee'\gamma'^2\cos(-\varpi+4l'-\varpi'-2\theta')$

(389) $-\frac{15}{16}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}ee'\gamma'^2\cos(2l-\varpi-2l'-\varpi'+2\theta')$

(390) $+\frac{75}{16}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}ee'\gamma'^2\cos(2l-\varpi-4l'+\varpi'+2\theta')$

(391) $-\frac{165}{64}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}e^2\gamma'^2\cos(l-2\varpi+3l'-2\theta')$

(392) $+\frac{45}{64}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}e^2\gamma'^2\cos(3l-2\varpi-3l'+2\theta')$

(393) $-\frac{165}{64}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}e'^2\gamma'^2\cos(3l+l'-2\varpi'-2\theta')$

(394) $-\frac{795}{64}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}e'^2\gamma'^2\cos(3l-3l'+2\varpi'-2\theta')$

(395) $+\frac{135}{16}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}ee'\gamma'^2\cos(2l+\varpi-\varpi'-2\theta')$

(396) $+\frac{405}{16}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}ee'\gamma'^2\cos(2l+\varpi-2l'+\varpi'-2\theta')$

(397) $\frac{45}{16}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}ee'\gamma'^2\cos(4l-\varpi-\varpi'-2\theta')$

(398) $\frac{135}{16}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}ee'\gamma'^2\cos(4l-\varpi-2l'+\varpi'-2\theta')$

(399) $-\frac{855}{64}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}e^2\gamma'^2\cos(l+2\varpi-l'-2\theta')$

(400) $-\frac{225}{64}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}e^2\gamma'^2\cos(5l-2\varpi-l'-2\theta')$

(401) $-\frac{27}{2}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}\gamma^2\gamma'^2\cos(l-2\theta-l'+2\theta')$

(402) $\frac{45}{8}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}\gamma^2\gamma'^2\cos(l+2\theta-l'-2\theta')$

(403) $-\frac{75}{8}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}\gamma^2\gamma'^2\cos(3l-2\theta-3l'+2\theta')$

(404) $-\frac{45}{4}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}\gamma^2\gamma'^2\cos(3l-2\theta+l'-2\theta')$

(405) $-\frac{45}{4}n'^2\varepsilon a^2\cdot\frac{a}{a'}\gamma^2\gamma'^2\cos(l-2\theta+3l'-2\theta')$

(406) $-\frac{35}{16}n'^2\varepsilon a^2\left(\frac{a}{a'}\right)^2\gamma'^2\cos(2l-4l'+2\theta')$

(407) $-\frac{35}{16}n'^2\varepsilon a^2\left(\frac{a}{a'}\right)^2\gamma'^2\cos(4l-2l'-2\theta').$

Le développement de R_2 s'obtient en supprimant dans le tableau précédent les trois termes qui portent les numéros 0, 11 et 55.

Cherchons maintenant quels termes de R_2 il faut associer à chaque terme de R. Les termes étant désignés par les numéros qu'ils ont dans le développement ci-dessus, prenons d'abord dans R le terme 0. Il est de la forme $(C + \overline{C}\gamma'^2)\cos\Omega$, l'argument Ω se réduisant ici à zéro : les angles à considérer dans la liste (a), page 66, sont donc $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \pm \theta$, $\mathcal{A} \pm 2\theta$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B} \pm \theta$, b. Comme d'ailleurs la somme des multiplicateurs de l, ϖ, θ, l', ϖ' est toujours zéro dans $\mathcal{A}$, ± 1 dans $\mathcal{B}$, ± 2 dans b, pour qu'un des angles $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \pm \theta$, $\mathcal{A} \pm 2\theta$ se réduise à un multiple de ϖ', il faut qu'on ait $\mathcal{A} = 0$ ou

$$\mathcal{A} = \pm(2\theta - 2\varpi');$$

pour qu'un des angles $\mathcal{B}$, $\mathcal{B} \pm \theta$ se réduise à un multiple de ϖ', il faut qu'on ait $\mathcal{B} = \pm\theta$ où $\mathcal{B} = \pm(\theta - 2\varpi')$; enfin, pour que b se réduise à un multiple de $2\varpi'$, il faut qu'on ait $\mathrm{b} = 2\varpi'$. Aucun des termes de R_2 compris dans le développement précédent ne satisfait à l'une ou à l'autre de ces conditions : ainsi aucun terme de R_2, associé au terme 0 de R, ne donne de partie non périodique dans $\delta_2 l$.

Prenons ensuite dans R le terme 1. Il est encore de la forme $(C + \overline{C}\gamma'^2)\cos\Omega$, Ω étant égal à $2l - 2l'$: il faut donc ici que l'un des angles

$$\mathcal{A} \pm (2l - 2l'), \quad \mathcal{A} \pm (2l - 2l') \pm \theta, \quad \mathcal{A} \pm (2l - 2l') \pm 2\theta,$$
$$\mathcal{B} \pm (2l - 2l'), \quad \mathcal{B} \pm (2l - 2l') \pm \theta, \quad \mathrm{b} \pm (2l - 2l')$$

se réduise à zéro ou à un multiple de ϖ'. Comme dans notre développement de R, les arguments sont toujours écrits de façon que le multiplicateur de l y ait le signe $+$, on ne pourra satisfaire

à la condition énoncée qu'en faisant l'une des hypothèses suivantes :

$$\mathcal{A} = 2l - 2l', \qquad \mathcal{A} = 2l + 2\theta - 2l' - 2\varpi',$$
$$\mathcal{A} = 2l - 2\theta - 2l' + 2\varpi', \qquad \mathcal{B} = 2l + \theta - 2l',$$
$$\mathcal{B} = 2l - \theta - 2l', \qquad \mathcal{B} = 2l + \theta - 2l' - 2\varpi',$$
$$\mathcal{B} = 2l - \theta - 2l' + 2\varpi', \qquad \mathrm{b} = 2l - 2l' + 2\varpi',$$
$$\mathrm{b} = 2l - 2l' - 2\varpi'.$$

De ces neuf hypothèses, la première est vérifiée par le terme 1 de R_2, la troisième par le terme 213, la cinquième par le terme 10, la septième par le terme 122, et la huitième par le terme 57 : les autres hypothèses ne sont vérifiées par aucun des termes de R_2 compris dans notre développement. Ainsi on obtiendra des parties non périodiques de $\delta_2 l$ en associant au terme 1 de R les termes 1, 10, 57, 122, 213 de R_2.

En continuant ainsi, on verra quels termes de R_2 doivent être associés avec chaque terme de R, et l'on trouvera que le nombre des combinaisons satisfaisant aux conditions énoncées ci-dessus est de 763. Mais, avant d'en écrire le tableau, il convient d'expliquer le partage de ces combinaisons en un certain nombre de groupes, pour chacun desquels on peut construire des formules générales donnant les parties non périodiques correspondantes de $\delta_2 l$.

Si l'argument du terme pris dans R, ou, pour parler plus brièvement, si l'argument de R est de la forme Ω, c'est-à-dire ne contient pas θ', l'argument de R_2 devra être de l'une des formes

$$\mathcal{A}, \qquad \mathcal{B} + \theta', \qquad \mathcal{B} - \theta', \qquad \mathrm{b} + 2\theta', \qquad \mathrm{b} - 2\theta'.$$

Si l'argument de R_2 est de la forme $\mathcal{A}$, on devra avoir $\mathcal{A} = \Omega$, ou $\mathcal{A} = \Omega - 2\theta + 2\varpi'$, ou $\mathcal{A} = \Omega + 2\theta - 2\varpi'$; s'il est de la forme $\mathcal{B} + \theta'$, on devra avoir $\mathcal{B} = \Omega - \theta$ ou $\mathcal{B} = \Omega + \theta - 2\varpi'$;

s'il est de la forme $\mathcal{V} - \theta'$, on devra avoir $\mathcal{V} = \Omega + \theta$ ou $\mathcal{V} = \Omega - \theta + 2\varpi'$; s'il est de la forme $b + 2\theta'$, on devra avoir $b = \Omega - 2\varpi'$; s'il est de la forme $b - 2\theta'$, on devra avoir $b = \Omega + 2\varpi'$.

Si l'argument de R est de la forme $\Psi + \theta'$, celui de R_2 devra être de l'une des formes

$$\mathcal{A}, \qquad \mathcal{V} + \theta', \qquad \mathcal{V} - \theta'.$$

S'il est de la forme $\mathcal{A}$, on devra avoir

$$\mathcal{A} = \Psi + \theta \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{A} = \Psi - \theta + 2\varpi';$$

s'il est de la forme $\mathcal{V} + \theta'$, on devra avoir $\mathcal{V} = \Psi$; s'il est de la forme $\mathcal{V} - \theta'$, on devra avoir $\mathcal{V} = \Psi + 2\varpi'$.

Si l'argument de R est de la forme $\Psi - \theta'$, celui de R_2 devra être de l'une des formes

$$\mathcal{A}, \qquad \mathcal{V} + \theta', \qquad \mathcal{V} - \theta'.$$

S'il est de la forme $\mathcal{A}$, on devra avoir

$$\mathcal{A} = \Psi - \theta \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{A} = \Psi + \theta - 2\varpi';$$

s'il est de la forme $\mathcal{V} + \theta'$, on devra avoir $\mathcal{V} = \Psi - 2\varpi'$; s'il est de la forme $\mathcal{V} - \theta'$, on devra avoir $\mathcal{V} = \Psi$.

Si l'argument de R est de la forme $\psi + 2\theta'$, celui de R_2 devra être de la forme $\mathcal{A}$, et l'on aura $\mathcal{A} = \psi + 2\varpi'$.

Enfin, si l'argument de R est de la forme $\psi - 2\theta'$, celui de R_2 devra encore être de la forme $\mathcal{A}$, mais on devra avoir $\mathcal{A} = \psi - 2\varpi'$.

On est conduit par là à distinguer 19 cas, que nous rangerons dans l'ordre indiqué par le tableau suivant.

	ARGUMENT DE R.	ARGUMENT DE R_1.	RELATION ENTRE les deux arguments.
1er CAS.....	Ω	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A} = \Omega$
2e CAS.....	Ω	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A} = \Omega - 2\theta + 2\varpi'$
3e CAS.....	Ω	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A} = \Omega + 2\theta - 2\varpi'$
4e CAS.....	Ω	$\mathcal{B} - \theta'$	$\mathcal{B} = \Omega + \theta$
5e CAS.....	Ω	$\mathcal{B} - \theta'$	$\mathcal{B} = \Omega - \theta + 2\varpi'$
6e CAS.....	Ω	$\mathcal{B} + \theta'$	$\mathcal{B} = \Omega - \theta$
7e CAS.....	Ω	$\mathcal{B} + \theta'$	$\mathcal{B} = \Omega + \theta - 2\varpi'$
8e CAS.....	$\Psi + \theta'$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A} = \Psi + \theta$
9e CAS.....	$\Psi + \theta'$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A} = \Psi - \theta + 2\varpi'$
10e CAS....	$\Psi - \theta'$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A} = \Psi - \theta$
11e CAS....	$\Psi - \theta'$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A} = \Psi + \theta - 2\varpi'$
12e CAS....	Ω	$b - 2\theta'$	$b = \Omega + 2\varpi'$
13e CAS....	Ω	$b + 2\theta'$	$b = \Omega - 2\varpi'$
14e CAS....	$\psi + 2\theta'$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A} = \psi + 2\varpi'$
15e CAS....	$\psi - 2\theta'$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A} = \psi - 2\varpi'$
16e CAS....	$\Psi + \theta'$	$\mathcal{B} + \theta'$	$\mathcal{B} = \Psi$
17e CAS....	$\Psi - \theta'$	$\mathcal{B} - \theta'$	$\mathcal{B} = \Psi$
18e CAS....	$\Psi + \theta'$	$\mathcal{B} - \theta'$	$\mathcal{B} = \Psi + 2\varpi'$
19e CAS....	$\Psi - \theta'$	$\mathcal{B} + \theta'$	$\mathcal{B} = \Psi - 2\varpi'$

Voici maintenant la répartition, entre ces 19 cas, des 763 combinaisons propres à fournir des parties non périodiques dans la longitude moyenne de la Lune. Dans chaque colonne de ce ta-

bleau, les nombres de gauche sont les numéros des termes de R, et les nombres de droite sont les numéros des termes de $\acute{R}_2$ qu'on doit leur associer.

TABLEAU DES 763 COMBINAISONS RÉPARTIES ENTRE LES 19 CAS.

1

1er CAS.

1	1	29	29	80	80	94	94	192	192	206	206	220	220	234	234
4	4	30	30	81	81	95	95	193	193	207	207	221	221	235	235
5	5	31	31	82	82	96	96	194	194	208	208	222	222	236	236
6	6	32	32	83	83	97	97	195	195	209	209	223	223	237	237
7	7	33	33	84	84	98	98	196	196	210	210	224	224	238	238
8	8	34	34	85	85	99	99	197	197	211	211	225	225	239	239
9	9	35	35	86	86	100	100	198	198	212	212	226	226	240	240
22	22	36	36	87	87	101	101	199	199	213	213	227	227	241	241
23	23	74	74	88	88	102	102	200	200	214	214	228	228	242	242
24	24	75	75	89	89	103	103	201	201	215	215	229	229	243	243
25	25	76	76	90	90	104	104	202	202	216	216	230	230	244	244
26	26	77	77	91	91	105	105	203	203	217	217	231	231	245	245
27	27	78	78	92	92	190	190	204	204	218	218	232	232	246	246
28	28	79	79	93	93	191	191	205	205	219	219	233	233	247	247

2^e^ CAS.

1	213	22	34	29	217	80	90	191	222	200	214	223	24	228	244
4	94	23	221	74	95	97	76	193	225	202	216	224	192	236	245
6	91	27	215	75	96	190	220	198	212	212	227	226	194	246	229

3^e^ CAS.

24	223	90	80	95	74	194	226	214	200	217	29	222	191	229	246
34	22	91	6	96	75	212	198	215	27	220	190	225	193	244	228
76	97	94	4	192	224	213	1	216	202	221	23	227	212	245	236

4^e^ CAS.

4	41	31	111	76	261	88	256	95	50	212	121	217	126	222	131
5	43	33	12	77	264	90	45	96	51	213	122	218	127	225	134
22	113	34	13	78	265	91	46	98	304	214	123	219	128	227	137
23	115	35	139	79	268	92	47	99	305	215	124	220	129	244	141
24	116	74	258	84	252	93	48	100	302	216	125	221	130	245	143
25	119	75	260	85	253	94	49	101	307						

5ᵉ CAS.

1	122	8	273	27	124	77	286	97	261	191	131	200	123	223	116
4	49	9	275	29	126	80	45	98	312	193	134	202	125	228	141
6	46	22	13	74	50	86	279	102	321	198	121	212	137	236	143
7	271	23	130	75	51	90	296	190	129						

6ᵉ CAS.

1	10	22	114	29	109	74	259	80	248	89	257	98	300	104	310
4	42	23	117	30	110	75	262	81	249	90	292	99	301	105	311
5	44	24	118	32	112	76	263	82	250	91	293	100	306	223	132
6	37	25	120	33	136	77	266	83	251	92	294	101	303	224	133
7	38	26	106	35	138	78	267	86	254	93	295	102	308	226	135
8	39	27	107	36	140	79	269	87	255	97	52	103	309	246	142
9	40	28	108												

7ᵉ CAS.

4	282	76	52	90	248	95	259	99	316	194	135	215	107	221	117
24	132	78	288	91	37	96	262	192	133	213	10	217	109	229	137
34	114	84	277	94	42										

8ᵉ CAS.

10	1	52	97	114	22	135	2.6	249	81	259	74	292	90	303	101
37	6	106	26	117	23	136	33	250	82	262	75	293	91	306	100
38	7	107	27	1.8	24	138	35	251	83	263	76	294	92	308	102
39	8	108	28	120	25	140	36	254	86	266	77	295	93	309	103
40	9	109	29	132	223	142	246	255	87	267	78	300	98	310	104
42	4	110	30	133	224	248	80	257	89	269	79	301	99	311	105
44	5	112	32												

9ᵉ CAS.

10	213	52	76	114	34	133	192	142	229	259	95	277	84	288	78
37	91	107	215	117	221	135	194	248	90	262	96	282	4	316	99
42	94	109	217	132	24										

10ᵉ CAS.

12	33	47	92	113	22	123	214	129	220	141	244	258	74	268	79
13	34	48	93	115	23	124	215	130	221	143	245	260	75	302	100
41	4	49	94	116	24	125	216	131	222	252	84	261	76	304	98
43	5	50	95	119	25	126	217	134	225	253	85	264	77	305	99
45	90	51	96	121	212	127	218	137	227	256	88	265	78	307	101
46	91	111	31	122	213	128	219	139	35						

11e CAS.

13	22	50	74	122	1	126	29	134	193	261	97	275	9	296	92
45	80	51	75	123	200	129	190	137	212	271	7	279	86	312	98
46	6	116	223	124	27	130	23	141	228	273	8	286	77	321	102
49	4	121	198	125	202	131	191	143	236						

12e CAS.

1	57	22	3	29	61	75	20	102	187	198	56	214	332	231	387
4	18	23	65	30	351	77	172	190	64	200	58	216	334	232	381
6	15	24	364	32	355	80	14	191	66	202	60	223	341	236	73
7	157	26	347	35	377	86	165	193	69	208	359	228	71	238	396
8	159	27	59	36	394	90	148	195	370	212	54	230	379	240	398
9	161	28	349	74	19	98	178								

13e CAS.

4	168	24	67	34	339	78	174	94	153	194	70	213	53	221	342
22	362	26	406	35	385	84	163	99	182	196	372	215	325	229	72
23	366	31	353	76	21	91	144	192	68	206	356	217	327	233	389

14e CAS.

21	76	68	192	144	91	168	4	325	215	342	221	362	22	385	35
53	213	70	194	153	94	174	78	327	217	353	31	366	23	389	233
67	24	72	229	163	84	182	99	339	34	356	206	372	196	406	26

15e CAS.

3	22	54	212	61	29	73	236	172	77	341	223	359	208	381	232
14	80	56	198	64	190	148	90	178	98	347	26	364	24	387	231
15	6	57	1	65	23	157	7	187	102	349	28	370	195	394	36
18	4	58	200	66	191	159	8	332	214	351	30	377	35	396	238
19	74	59	27	69	193	161	9	334	216	355	32	379	230	398	240
20	75	60	202	71	228	165	86								

16e CAS.

10	10	106	106	118	118	142	142	259	259	280	280	293	293	308	308
37	37	107	107	120	120	248	248	262	262	282	282	294	294	309	309
38	38	108	108	132	132	249	249	263	263	285	285	295	295	310	310
39	39	109	109	133	133	250	250	266	266	288	288	300	300	311	311
40	40	110	110	135	135	251	251	267	267	289	289	301	301	316	316
42	42	112	112	136	136	254	254	269	269	291	291	303	303	317	317
44	44	114	114	138	138	255	255	277	277	292	292	306	306	319	319
52	52	117	117	140	140	257	257								

17ᵉ cas.

12	12	51	51	124	124	137	137	261	261	275	275	290	290	312	312
13	13	111	111	125	125	139	139	264	264	276	276	296	296	313	313
41	41	113	113	126	126	141	141	265	265	278	278	297	297	314	314
43	43	115	115	127	127	143	143	268	268	279	279	298	298	315	315
45	45	116	116	128	128	252	252	270	270	281	281	299	299	318	318
46	46	119	119	129	129	253	253	271	271	283	283	302	302	320	320
47	47	121	121	130	130	256	256	272	272	284	284	304	304	321	321
48	48	122	122	131	131	258	258	273	273	286	286	305	305	322	322
49	49	123	123	134	134	260	260	274	274	287	287	307	307	323	323
50	50														

18ᵉ cas.

10	122	39	273	52	261	114	13	248	45	262	51	282	41	300	312
37	46	40	275	107	124	117	130	254	279	266	286	288	265	308	321
38	271	42	49	109	126	132	116	259	50	277	252	292	296	316	305

19ᵉ cas.

13	114	46	37	51	262	124	107	252	277	271	38	279	255	305	316
41	282	49	42	116	132	126	109	261	52	273	39	286	266	312	300
45	248	50	259	122	10	130	117	265	288	275	40	296	292	321	308

Nous allons donner maintenant, pour chacun des 19 cas, les formules servant à calculer les parties non périodiques de $\delta_2 l$ correspondantes aux diverses combinaisons que ce cas comprend; mais il convient, auparavant, de définir quelques notations dont la signification sera la même dans toutes ces formules.

Lorsqu'un terme de la fonction perturbatrice sera considéré comme appartenant à R_2, nous représenterons son coefficient par $C+\overline{C}\gamma'^2$, ou par $C\gamma'$, ou par $C\gamma'^2$, suivant que l'argument aura l'une des trois formes $\mathfrak{A}$, ou $\mathfrak{B}\pm\theta'$, ou $\mathfrak{b}\pm 2\theta'$. Parcillement, lorsqu'un terme de la fonction perturbatrice sera considéré comme appartenant à R, son coefficient sera représenté par $T+\overline{T}\gamma'^2$, ou par $T\gamma'$, ou par $T\gamma'^2$, selon que l'argument sera de l'une des trois formes Ω, ou $\Psi\pm\theta'$, ou $\psi\pm 2\theta'$.

Les lettres m, m_1, m_2, m' continueront à désigner les multipli-

cateurs de l, ϖ, θ, l' dans l'argument $\mathcal{A}$, ou $\mathfrak{B} \pm \theta'$, ou $\mathfrak{b} \pm 2\theta'$ d'un terme de R_2 : on aura toujours

$$\mu = m(n + k^o) + m_1 j^o + m_2 h^o + m'n'.$$

Nous poserons[1]

$$\Upsilon = \frac{2}{a}\frac{dT}{da} - \frac{\sqrt{1-e^2} - 1 + e^2}{a^2 e}\frac{dT}{de} - \frac{\gamma}{2a^2\sqrt{1-e^2}}\frac{dT}{d\gamma},$$

$$b = \frac{1}{n}\left(\frac{3}{2a}\Upsilon + \frac{d\Upsilon}{da}\right), \qquad c = \frac{1}{n}\frac{d\Upsilon}{d\gamma}, \qquad d = \frac{1}{n}\frac{d\Upsilon}{de}, \qquad f = -\frac{1}{n}\Upsilon$$

et pareillement

$$\bar{\Upsilon} = \frac{2}{a}\frac{d\bar{T}}{da} - \frac{\sqrt{1-e^2} - 1 + e^2}{a^2 e}\frac{d\bar{T}}{de} - \frac{\gamma}{2a^2\sqrt{1-e^2}}\frac{d\bar{T}}{d\gamma},$$

$$\bar{b} = \frac{1}{n}\left(\frac{3}{2a}\bar{\Upsilon} + \frac{d\bar{\Upsilon}}{da}\right), \qquad \bar{c} = \frac{1}{n}\frac{d\bar{\Upsilon}}{d\gamma}, \qquad \bar{d} = \frac{1}{n}\frac{d\bar{\Upsilon}}{de}, \qquad \bar{f} = -\frac{1}{n}\bar{\Upsilon}$$

Enfin nous ferons encore

$$g = -\frac{3m}{a^4}\frac{dT}{d\gamma}, \qquad i = -\frac{3m}{a^2}\frac{dT}{de}, \qquad r = -\frac{3m}{a^3}\frac{dT}{da} + \frac{6m}{a^3}T,$$

$$s = -\frac{3m}{a^4}T.$$

Cela posé, reprenons chacun des 19 cas énumérés ci-dessus : calculons, pour une combinaison quelconque de chacun d'eux et conformément aux indications déjà données, la partie non périodique de $\delta_1\left(\frac{3J}{a^2}\right)$ et celle de $\delta_1 S$; intégrons la première deux fois et la seconde une fois, puis ajoutons les résultats de ces intégrations. Nous aurons ainsi la partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée. On laissera d'ailleurs de côté les termes constants ou proportionnels au temps; car ils peuvent être supposés compris dans la portion $l_0 = nt + \lambda_0$ de la longitude moyenne.

Nous allons écrire explicitement pour chaque cas les formules

[1] La lettre Υ reçoit ici et gardera dans la suite du Mémoire une signification différente de celle qui lui a été attribuée page 23.

auxquelles on parvient en suivant cette marche; puis nous en ferons l'application aux diverses combinaisons que ce cas comprend.

1er CAS.

On prend dans R le terme $(T+\bar{T}\gamma'^2)\cos\Omega$, dans R_2 le terme $(C+\bar{C}\gamma'^2)\cos\mathcal{A}$, et l'on a $\mathcal{A}=\Omega$.

Soient

$$H = -\frac{1}{2\mu}\left[gX_0+iY_0+rZ_0+s(m_2U_0+m_1V_0+mW_0)\right]-\frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}s\frac{Z}{a},$$

$$H' = \frac{1}{2}\left[gK_2+iM_2+rP_2+s(m_2L_2+m_1N_2+mQ_2)\right]+\frac{m}{2}s\Pi_2,$$

$$H'' = \frac{1}{2}\left[-gK_5-iM_5-rP_5+s(m_2L_5+m_1N_5+mQ_5)\right]+\frac{m}{2}s\Pi_5,$$

$$H^{IV} = \frac{1}{2}\left[gK_6+iM_6+rP_6-s(m_2L_6+m_1N_6+mQ_6)\right]-\frac{m}{2}s\Pi_6,$$

$$H^{V} = \frac{1}{2}\left[gK_7+iM_7+rP_7+s(m_2L_7+m_1N_7+mQ_7)\right]+\frac{m}{2}s\Pi_7,$$

$$H^{VI} = \frac{1}{2}\left[gK_8+iM_8+rP_8+s(m_2L_8+m_1N_8+mQ_8)\right]+\frac{m}{2}s\Pi_8,$$

$$\begin{aligned}\Phi' = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\mathcal{M}^{IV}+\mathcal{M}\mathcal{L}^{IV}\right)\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0+H_0+\frac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{dH''}{d\gamma}\right)_0-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{IV}H''_0 \\ +\frac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{dH^{IV}}{d\gamma}\right)_0+\frac{1}{2}\mathcal{L}^{IV}H^{IV}_0+\frac{1}{2}\mathcal{M}\left(\frac{dH^{V}}{d\gamma}\right)_0-\frac{1}{2}\mathcal{M}^{IV}H^{V}_0 \\ +\frac{1}{2}\mathcal{M}\left(\frac{dH^{VI}}{d\gamma}\right)_0+\frac{1}{2}\mathcal{M}^{IV}H^{VI}_0,\end{aligned}$$

$$\Sigma = \frac{1}{2\mu}\left[-cX_0-dY_0-bZ_0+f(m_2U_0+m_1V_0+mW_0)\right]+\frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}f\frac{Z}{a},$$

$$\begin{aligned}\Sigma' = \frac{1}{2\mu}\left[\bar{c}X_0+\bar{d}Y_0+\bar{b}Z_0+\bar{f}(m_2U_0+m_1V_0+mW_0)\right]+\frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}\bar{f}\frac{Z}{a} \\ +\frac{1}{2}\left[cK_3+dM_3+bP_3+f(m_2L_3+m_1N_3+mQ_3)\right] \\ +\frac{m}{2}f\Pi_3,\end{aligned}$$

$$\Sigma'' = \frac{1}{2}\left[-cK_7-dM_7-bP_7+f(m_2L_7+m_1N_7+mQ_7)\right]+\frac{1}{2}mf\Pi_7,$$

$$\Sigma''' = \frac{1}{2}\left[-cK_8-dM_8-bP_8+f(m_2L_8+m_1N_8+mQ_8)\right]+\frac{1}{2}mf\Pi_8,$$

$$\Gamma = \frac{1}{4}\mathfrak{L}^2\left(\frac{d^2\Sigma}{d\gamma^2}\right)_0 + \mathfrak{M}\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0 - \frac{1}{4}\mathfrak{L}^{iv\,2}\Sigma_0 + \Sigma'_0 + \frac{1}{2}\mathfrak{L}\left(\frac{d\Sigma'}{d\gamma}\right)_0 - \frac{1}{2}\mathfrak{L}\left(\frac{d\Sigma''}{d\gamma}\right)_0 + \frac{1}{2}\mathfrak{L}^{iv}\Sigma'_0 + \frac{1}{2}\mathfrak{L}^{iv}\Sigma''_0.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée est

$$\delta_2 l = \frac{1}{3}\left(\Phi' + \Gamma\right)\left(A^2 + B^2\right)t^3\ ^{(1)}.$$

2e CAS.

On prend dans R le terme $(T + \overline{T}\gamma'^2)\cos\Omega$, dans R_2 le terme $(C + \overline{C}\gamma'^2)\cos\mathcal{A}$, et l'on a $\mathcal{A} = \Omega - 2\theta + 2\varpi'$.

(1) Le calcul semble d'abord donner, dans le $\delta_2 l$ correspondant au premier cas, un terme en t^4; on trouve en effet dans $\delta_1\left(\frac{3J}{a^2}\right)$ un terme en t^3 qui peut s'écrire

$$(\mathfrak{M}^{iv} H_0 + H''_0)t^3.$$

en faisant

$$H'' = \frac{1}{2}\left[gK_4 + iM_4 + rP_4 + s(m_2L_4 + m_1N_4 + mQ_4)\right] + \frac{m}{2}s\Pi_4.$$

Mais on a (voir p. 50, 51, 52)

$$K_4 = \frac{1}{\mu}X_0\mathfrak{M}^{iv}, \quad M_4 = \frac{1}{\mu}Y_0\mathfrak{M}^{iv}, \quad P_4 = \frac{1}{\mu}Z_0\mathfrak{M}^{iv}, \quad L_4 = \frac{1}{\mu}U_0\mathfrak{M}^{iv},$$

$$N_4 = \frac{1}{\mu}V_0\mathfrak{M}^{iv}, \quad Q_4 = \frac{1}{\mu}W_0\mathfrak{M}^{iv}, \quad \Pi_4 = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu}\frac{P_4}{a} = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu^2}\frac{Z_0}{a}\mathfrak{M}^{iv};$$

il suit de là

$$H'' = \frac{1}{2\mu}\left[gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s(m_2U_0 + m_1V_0 + mW_0)\right]\mathfrak{M}^{iv} + \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}s\frac{Z_0}{a}\mathfrak{M}^{iv} = -\mathfrak{M}^{iv}H,$$

ou bien

$$\mathfrak{M}^{iv}H + H'' = 0,$$

et, par conséquent, en faisant $\gamma = \gamma_0$,

$$\mathfrak{M}^{iv}H_0 + H''_0 = 0.$$

Ainsi ce terme en t^3 de $\delta_1\left(\frac{3J}{a^2}\right)$, qui aurait produit un terme en t^4 dans $\int\delta_2 n\,dt$, se réduit à zéro.

Soient

$$\mathrm{H} = -\frac{1}{2\mu}\left\{g\mathrm{X}_0 + i\mathrm{Y}_0 + r\mathrm{Z}_0 + s\left[(m_2+2)\,\mathrm{U}_0 + m_1\mathrm{V}_0 + m\mathrm{W}_0\right]\right\} - \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}s\frac{\mathrm{Z}_0}{a},$$

$$\mathrm{H}' = \frac{1}{2}\left\{g\mathrm{K}_5 + i\mathrm{M}_5 + r\mathrm{P}_5 - s\left[(m_2+2)\,\mathrm{L}_5 + m_1\mathrm{N}_5 + m\mathrm{Q}_5\right]\right\} - \frac{m}{2}s\Pi_5,$$

$$\mathrm{H}'' = \frac{1}{2}\left\{g\mathrm{K}_8 + i\mathrm{M}_8 + r\mathrm{P}_8 + s\left[(m_2+2)\,\mathrm{L}_8 + m_1\mathrm{N}_8 + m\mathrm{Q}_8\right]\right\} + \frac{m}{2}s\Pi_8,$$

$$\mathrm{H}''' = \frac{1}{2}\left\{-g\mathrm{K}_{15} - i\mathrm{M}_{15} - r\mathrm{P}_{15} + s\left[(m_2+2)\,\mathrm{L}_{15} + m_1\mathrm{N}_{15} + m\mathrm{Q}_{15}\right]\right\} + \frac{m}{2}s\Pi_{15},$$

$$\mathrm{H}^{iv} = \frac{1}{2}\left\{g\mathrm{K}_{17} + i\mathrm{M}_{17} + r\mathrm{P}_{17} + s\left[(m_2+2)\,\mathrm{L}_{17} + m_1\mathrm{N}_{17} + m\mathrm{Q}_{17}\right]\right\} + \frac{m}{2}s\Pi_{17},$$

$$\mathrm{H}^{v} = \frac{1}{2}\left\{-g\mathrm{K}_{19} - i\mathrm{M}_{19} - r\mathrm{P}_{19} + s\left[(m_2+2)\,\mathrm{L}_{19} + m_1\mathrm{N}_{19} + m\mathrm{Q}_{19}\right]\right\} + \frac{m}{2}s\Pi_{19},$$

$$\begin{aligned}\Phi = &-\frac{1}{4}\mathcal{L}^2\left(\frac{d^2\mathrm{H}}{d\gamma^2}\right)_0 - \frac{1}{2}\left[\mathcal{R} + \mathcal{L}\left(2\mathcal{L}'+\mathcal{L}''\right)\right]\left(\frac{d\mathrm{H}}{d\gamma}\right)_0 \\ &+\frac{1}{2}\left[2\mathcal{R}' + \mathcal{R}'' - \frac{1}{2}\left(2\mathcal{L}'+\mathcal{L}''\right)^2\right]\mathrm{H}_0 - \mathcal{L}\left(\frac{d\mathrm{H}''}{d\gamma}\right)_0 \\ &-\left(2\mathcal{L}'+\mathcal{L}''\right)\mathrm{H}''_0 + \mathrm{H}^{v}_0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi' = &-\frac{1}{2}\mathcal{L}\mathcal{M}\left(\frac{d^2\mathrm{H}}{d\gamma^2}\right)_0 \\ &+\frac{1}{2}\left[\mathcal{S} + \mathcal{L}\left(2\mathcal{M}'+\mathcal{M}''\right) - \mathcal{M}\left(2\mathcal{L}'+\mathcal{L}''\right)\right]\left(\frac{d\mathrm{H}}{d\gamma}\right)_0 \\ &+\frac{1}{2}\left[2\mathcal{S}' + \mathcal{S}'' + \left(2\mathcal{L}'+\mathcal{L}''\right)\left(2\mathcal{M}'+\mathcal{M}''\right)\right]\mathrm{H}_0 \\ &-\mathcal{L}\left(\frac{d\mathrm{H}'}{d\gamma}\right)_0 - \left(2\mathcal{L}'+\mathcal{L}''\right)\mathrm{H}'_0 - \mathcal{M}\left(\frac{d\mathrm{H}''}{d\gamma}\right)_0 \\ &+\left(2\mathcal{M}'+\mathcal{M}''\right)\mathrm{H}''_0 + \mathrm{H}^{iv}_0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi'' = &\frac{1}{4}\mathcal{M}^2\left(\frac{d^2\mathrm{H}}{d\gamma^2}\right)_0 - \frac{1}{2}\left[\mathcal{T} + \mathcal{M}\left(2\mathcal{M}'+\mathcal{M}''\right)\right]\left(\frac{d\mathrm{H}}{d\gamma}\right)_0 \\ &+\frac{1}{2}\left[2\mathcal{T}' + \mathcal{T}'' + \frac{1}{2}\left(2\mathcal{M}'+\mathcal{M}''\right)^2\right]\mathrm{H}_0 + \mathcal{M}\left(\frac{d\mathrm{H}'}{d\gamma}\right)_0 \\ &-\left(2\mathcal{M}'+\mathcal{M}''\right)\mathrm{H}'_0 + \mathrm{H}''_0,\end{aligned}$$

$$\Sigma = \frac{1}{2\mu}\left\{ -cX_0 - dY_0 - bZ_0 + f\left[(m_2+2)U_0 + m_1V_0 + mW_0\right]\right\} + \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}f\frac{Z_0}{a},$$

$$\Sigma' = \frac{1}{2}\left\{cK_5 + dM_5 + bP_5 + f\left[(m_2+2)L_5 + m_1N_5 + mQ_5\right]\right\} + \frac{m}{2}f\Pi_5,$$

$$\Sigma'' = \frac{1}{2}\left\{-cK_8 - dM_8 - bP_8 + f\left[(m_2+2)L_8 + m_1N_8 + mQ_8\right]\right\} + \frac{m}{2}f\Pi_8,$$

$$\Sigma''' = \frac{1}{2}\left\{cK_{17} + dM_{17} + bP_{17} - f\left[(m_2+2)L_{17} + m_1N_{17} + mQ_{17}\right]\right\} - \frac{m}{2}f\Pi_{17},$$

$$\Sigma'' = \frac{1}{2}\left\{cK_{19} + dM_{19} + bP_{19} + f\left[(m_2+2)L_{19} + m_1N_{19} + mQ_{19}\right]\right\} + \frac{m}{2}f\Pi_{19},$$

$$\Gamma = \frac{1}{4}\mathcal{L}^2\left(\frac{d^2\Sigma}{d\gamma^2}\right)_0 + \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}\left(\mathcal{L}'' + 2\mathcal{L}'\right) + \mathcal{R}\right]\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0 + \left[\frac{1}{4}\left(\mathcal{L}'' + 2\mathcal{L}'\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\mathcal{R}'' + 2\mathcal{R}'\right)\right]\Sigma_0 - \mathcal{L}\left(\frac{d\Sigma''}{d\gamma}\right)_0 \left(\mathcal{L}'' + 2\mathcal{L}'\right)\Sigma''_0 + \Sigma'''_0.$$

$$\Gamma' = -\frac{1}{2}\mathcal{L}\mathfrak{M}\left(\frac{d^2\Sigma}{d\gamma^2}\right)_0 + \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}\left(\mathfrak{M}'' + 2\mathfrak{M}'\right) - \mathfrak{M}\left(\mathcal{L}'' + 2\mathcal{L}'\right) + \mathcal{S}\right]\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0 + \left[\frac{1}{2}\left(\mathcal{L}'' + 2\mathcal{L}'\right)\left(\mathfrak{M}'' + 2\mathfrak{M}'\right) + \frac{1}{2}\left(\mathcal{S}'' + 2\mathcal{S}'\right)\right]\Sigma_0 - \mathcal{L}\left(\frac{d\Sigma'}{d\gamma}\right)_0 - \left(\mathcal{L}'' + 2\mathcal{L}'\right)\Sigma'_0 + \mathfrak{M}\left(\frac{d\Sigma''}{d\gamma}\right)_0 - \left(\mathfrak{M}'' + 2\mathfrak{M}'\right)\Sigma''_0 + \Sigma'''_0.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi \cdot B'_1 t^4 + \left(\frac{1}{6}\Phi' + \frac{1}{3}\Gamma\right)A'_1 t^3 + \left(\frac{1}{2}\Phi'' + \frac{1}{2}\Gamma'\right)B'_1 t^2.$$

3ᵉ CAS.

On prend dans R le terme $(T + \overline{T}\gamma'^2)\cos\Omega$, dans R_2 le terme $(C + \overline{C}\gamma'^2)\cos\mathcal{A}$, et l'on a $\mathcal{A} = \Omega + 2\theta - 2\varpi'$.

Soient

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2\mu}\left\{g\mathrm{X}_0 + i\mathrm{Y}_0 + r\mathrm{Z}_0 + s\left[(m_2 - 2)\mathrm{U}_0 + m_1\mathrm{V}_0 + m\mathrm{W}_0\right]\right\} + \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}s\frac{\mathrm{Z}_0}{a},$$

$$\mathrm{H}' = \frac{1}{2}\left\{-g\mathrm{K}_6 - i\mathrm{M}_6 - r\mathrm{P}_6 + s\left[(m_2 - 2)\mathrm{L}_6 + m_1\mathrm{N}_6 + m\mathrm{Q}_6\right]\right\} + \frac{m}{2}s\Pi_6,$$

$$\mathrm{H}'' = \frac{1}{2}\left\{g\mathrm{K}_7 + i\mathrm{M}_7 + r\mathrm{P}_7 + s\left[(m_2 - 2)\mathrm{L}_7 + m_1\mathrm{N}_7 + m\mathrm{Q}_7\right]\right\} + \frac{m}{2}s\Pi_7,$$

$$\mathrm{H}''' = \frac{1}{2}\left\{g\mathrm{K}_{16} + i\mathrm{M}_{16} + r\mathrm{P}_{16} - s\left[(m_2 - 2)\mathrm{L}_{16} + m_1\mathrm{N}_{16} + m\mathrm{Q}_{16}\right]\right\}$$
$$+ \frac{m}{2}s\Pi_{16},$$

$$\mathrm{H}^{\text{iv}} = \frac{1}{2}\left\{g\mathrm{K}_{18} + i\mathrm{M}_{18} + r\mathrm{P}_{18} + s\left[(m_2 - 2)\mathrm{L}_{18} + m_1\mathrm{N}_{18} + m\mathrm{Q}_{18}\right]\right\}$$
$$+ \frac{m}{2}s\Pi_{18},$$

$$\mathrm{H}^{\text{v}} = \frac{1}{2}\left\{g\mathrm{K}_{20} + i\mathrm{M}_{20} + r\mathrm{P}_{20} - s\left[(m_2 - 2)\mathrm{L}_{20} + m_1\mathrm{N}_{20} + m\mathrm{Q}_{20}\right]\right\}$$
$$- \frac{m}{2}s\Pi_{20},$$

$$\Phi = -\frac{1}{4}\mathcal{L}^2\left(\frac{d^2\mathrm{H}}{d\gamma^2}\right)_0 - \frac{1}{2}\left[\mathcal{R} + \mathcal{L}\left(2\mathcal{L}' - \mathcal{L}^{\text{iv}}\right)\right]\left(\frac{d\mathrm{H}}{d\gamma}\right)_0$$
$$+ \frac{1}{2}\left[2\mathcal{R}' - \mathcal{R}^{\text{iv}} - \frac{1}{2}\left(2\mathcal{L}' - \mathcal{L}^{\text{iv}}\right)^2\right]\mathrm{H}_0 - \mathcal{L}\left(\frac{d\mathrm{H}''}{d\gamma}\right)_0$$
$$- \left(2\mathcal{L}' - \mathcal{L}^{\text{iv}}\right)\mathrm{H}''_0 + \mathrm{H}^{\text{v}}_0,$$

$$\Phi' = -\frac{1}{2}\mathcal{L}\mathcal{M}\left(\frac{d^2\mathrm{H}}{d\gamma^2}\right)_0$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\mathcal{S} + \mathcal{L}\left(2\mathcal{M}' - \mathcal{M}^{\text{iv}}\right) - \mathcal{M}\left(2\mathcal{L}' - \mathcal{L}^{\text{iv}}\right)\right]\left(\frac{d\mathrm{H}}{d\gamma}\right)_0$$
$$+ \frac{1}{2}\left[2\mathcal{S}' - \mathcal{S}^{\text{iv}} + \left(2\mathcal{L}' - \mathcal{L}^{\text{iv}}\right)\left(2\mathcal{M}' - \mathcal{M}^{\text{iv}}\right)\right]\mathrm{H}_0$$
$$- \mathcal{L}\left(\frac{d\mathrm{H}'}{d\gamma}\right)_0 - \left(2\mathcal{L}' - \mathcal{L}^{\text{iv}}\right)\mathrm{H}'_0 - \mathcal{M}\left(\frac{d\mathrm{H}''}{d\gamma}\right)_0$$
$$+ \left(2\mathcal{M}' - \mathcal{M}^{\text{iv}}\right)\mathrm{H}''_0 + \mathrm{H}^{\text{iv}}_0,$$

$$\Phi'' = \frac{1}{4}\mathcal{M}^2\left(\frac{d^2\mathrm{H}}{d\gamma^2}\right)_0 - \frac{1}{2}\left[\mathcal{T} + \mathcal{M}\left(2\mathcal{M}' - \mathcal{M}^{\text{iv}}\right)\right]\left(\frac{d\mathrm{H}}{d\gamma}\right)_0$$
$$+ \frac{1}{2}\left[2\mathcal{T}' - \mathcal{T}^{\text{iv}} + \frac{1}{2}\left(2\mathcal{M}' - \mathcal{M}^{\text{iv}}\right)^2\right]\mathrm{H}_0$$
$$+ \mathcal{M}\left(\frac{d\mathrm{H}'}{d\gamma}\right)_0 - \left(2\mathcal{M}' - \mathcal{M}^{\text{iv}}\right)\mathrm{H}'_0 + \mathrm{H}''_0.$$

$$\Sigma = \frac{1}{2\mu}\Big\{ -cX_0 - dY_0 - bZ_0 + f\left[(m_2 - 2)U_0 + m_1V_0 + mW_0\right]\Big\}$$
$$+ \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2} f \frac{Z_0}{a},$$

$$\Sigma' = \frac{1}{2}\Big\{ cK_6 + dM_6 + bP_6 + f\left[(m_2 - 2)L_6 + m_1N_6 + mQ_6\right]\Big\} + \frac{m}{2} f H_6,$$

$$\Sigma'' = \frac{1}{2}\Big\{ -cK_7 - dM_7 - bP_7 + f\left[(m_2 - 2)L_7 + m_1N_7 + mQ_7\right]\Big\}$$
$$+ \frac{m}{2} f H_7,$$

$$\Sigma''' = \frac{1}{2}\Big\{ -cK_{18} - dM_{18} - bP_{18} + f\left[(m_2 - 2)L_{18} + m_1N_{18} + mQ_{18}\right]\Big\}$$
$$+ \frac{m}{2} f H_{18},$$

$$\Sigma^{\text{IV}} = \frac{1}{2}\Big\{ cK_{20} + dM_{20} + bP_{20} + f\left[(m_2 - 2)L_{20} + m_1N_{20} + mQ_{20}\right]\Big\}$$
$$+ \frac{m}{2} f H_{20},$$

$$\Gamma = \frac{1}{4}\mathfrak{L}^2\left(\frac{d^2\Sigma}{d\gamma^2}\right)_0 + \frac{1}{2}\left[-\mathfrak{L}\left(\mathfrak{L}'' - 2\mathfrak{L}'\right) + \mathfrak{R}\right]\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0$$
$$+ \left[\frac{1}{4}\left(\mathfrak{L}'' - 2\mathfrak{L}'\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\mathfrak{R}'' - 2\mathfrak{R}'\right)\right]\Sigma_0 + \mathfrak{L}\left(\frac{d\Sigma''}{d\gamma}\right)_0$$
$$- \left(\mathfrak{L}'' - 2\mathfrak{L}'\right)\Sigma''_0 + \Sigma^{\text{IV}}_0.$$

$$\Gamma' = -\frac{1}{2}\mathfrak{L}\mathfrak{M}\left(\frac{d^2\Sigma}{d\gamma^2}\right)_0$$
$$+ \frac{1}{2}\left[-\mathfrak{L}\left(\mathfrak{M}'' - 2\mathfrak{M}'\right) + \mathfrak{M}\left(\mathfrak{L}'' - 2\mathfrak{L}'\right) + \mathfrak{S}\right]\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0$$
$$+ \left[\frac{1}{2}\left(\mathfrak{L}'' - 2\mathfrak{L}'\right)\left(\mathfrak{M}'' - 2\mathfrak{M}'\right) - \frac{1}{2}\left(\mathfrak{S}'' - 2\mathfrak{S}'\right)\right]\Sigma_0$$
$$- \mathfrak{L}\left(\frac{d\Sigma'}{d\gamma}\right)_0 + \left(\mathfrak{L}'' - 2\mathfrak{L}'\right)\Sigma'_0 - \mathfrak{M}\left(\frac{d\Sigma''}{d\gamma}\right)_0$$
$$- \left(\mathfrak{M}'' - 2\mathfrak{M}'\right)\Sigma''_0 + \Sigma'''_0.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi\cdot B'_1 t^4 + \left(\frac{1}{6}\Phi' + \frac{1}{3}\Gamma\right)A'_1 t^3 + \left(\frac{1}{2}\Phi'' + \frac{1}{2}\Gamma'\right)B_1 t^2.$$

4ᵉ CAS.

On prend dans R le terme $(T+\overline{T}\gamma'^2)\cos\Omega$, dans R_2 le terme $C\gamma'\cos(\vartheta-\theta')$, et l'on a $\vartheta=\Omega+\theta$.

Soient

$$H=\frac{1}{2\mu^2}\left\{gX_0+iY_0+rZ_0+s\left[(m_2-1)U_0+m_1V_0+mW_0\right]\right\}+\frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2}s\frac{Z_0}{a},$$

$$H'=-\frac{1}{2\mu}\left\{gX_0+iY_0+rZ_0+s\left[(m_2-1)U_0+m_1V_0+mW_0\right]\right\}-\frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}s\frac{Z_0}{a},$$

$$H''=\frac{1}{2}\left\{gK_2+iM_2+rP_2+s\left[(m_2-1)L_2+m_1N_2+mQ_2\right]\right\}+\frac{m}{2}s\Pi_2,$$

$$\Phi=\frac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0+\frac{1}{2}\left(\mathcal{L}'-\mathcal{L}''\right)H_0+\frac{1}{2}\mathfrak{M}\left(\frac{dH'}{d\gamma}\right)_0-\frac{1}{2}\left(\mathfrak{M}'-\mathfrak{M}''\right)H'_0+H''_0,$$

$$\Sigma'=\frac{1}{2\mu}\left\{cX_0+dY_0+bZ_0-f\left[(m_2-1)U_0+m_1V_0+mW_0\right]\right\}-\frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}f\frac{Z_0}{a},$$

$$\Sigma''=\frac{1}{2}\left\{cK_3+dM_3+bP_3+f\left[(m_2-1)L_3+m_1N_3+mQ_3\right]\right\}+\frac{m}{2}f\Pi_3,$$

$$\Gamma=-\frac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{d\Sigma'}{d\gamma}\right)_0-\frac{1}{2}\left(\mathcal{L}'-\mathcal{L}''\right)\Sigma'_0+\Sigma''_0.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l=\left(\frac{1}{6}\Phi+\frac{1}{3}\Gamma\right)\left(A^2+B^2\right)t^3.$$

5ᵉ CAS.

On prend dans R le terme $(T+\overline{T}\gamma'^2)\cos\Omega$, dans R_2 le terme $C\gamma'\cos(\vartheta-\theta')$, et l'on a $\vartheta=\Omega-\theta+2\varpi'$.

Soient

$$\mathrm{H} = -\frac{1}{2\mu^2}\left\{ g\mathrm{X}_0 + i\mathrm{Y}_0 + r\mathrm{Z}_0 + s\left[(m_2+1)\mathrm{U}_0 + m_1\mathrm{V}_0 + m\mathrm{W}_0\right]\right\}$$

$$-\frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^3}s\frac{\mathrm{Z}_0}{a},$$

$$\mathrm{H}' = -\frac{1}{2\mu}\left\{ g\mathrm{X}_0 + i\mathrm{Y}_0 + r\mathrm{Z}_0 + s\left[(m_2+1)\mathrm{U}_0 + m_1\mathrm{V}_0 + m\mathrm{W}_0\right]\right\}$$

$$-\frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}s\frac{\mathrm{Z}_0}{a},$$

$$\mathrm{H}'' = \frac{1}{2}\left\{ -g\mathrm{K}_4 - i\mathrm{M}_4 - r\mathrm{P}_4 + s\left[(m_2+1)\mathrm{L}_4 + m_1\mathrm{N}_4 + m\mathrm{Q}_4\right]\right\} + \frac{m}{2}s\Pi_4,$$

$$\mathrm{H}''' = \frac{1}{2}\left\{ g\mathrm{K}_5 + i\mathrm{M}_5 + r\mathrm{P}_5 + s\left[(m_2+1)\mathrm{L}_5 + m_1\mathrm{N}_5 + m\mathrm{Q}_5\right]\right\} + \frac{m}{2}s\Pi_5,$$

$$\mathrm{H}^{\mathrm{iv}} = \frac{1}{2}\left\{ -g\mathrm{K}_6 - i\mathrm{M}_6 - r\mathrm{P}_6 + s\left[(m_2+1)\mathrm{L}_6 + m_1\mathrm{N}_6 + m\mathrm{Q}_6\right]\right\} + \frac{m}{2}s\Pi_6,$$

$$\Phi = -\mathcal{L}\left(\frac{d\mathrm{H}'}{dy}\right)_0 - \left(\mathcal{L}' + \mathcal{L}''\right)\mathrm{H}'_0 + \mathrm{H}''_0,$$

$$\Phi' = -\mathcal{L}\left(\frac{d\mathrm{H}}{dy}\right)_0 - \left(\mathcal{L}' + \mathcal{L}''\right)\mathrm{H}_0 - \mathfrak{M}\left(\frac{d\mathrm{H}'}{dy}\right)_0$$

$$+\left(\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''\right)\mathrm{H}'_0 + \mathrm{H}'''_0,$$

$$\Phi'' = \mathfrak{M}\left(\frac{d\mathrm{H}}{dy}\right)_0 - \left(\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''\right)\mathrm{H}_0 + \mathrm{H}^{\mathrm{iv}}_0,$$

$$\Sigma = \frac{1}{2\mu^2}\left\{ -c\mathrm{X}_0 - d\mathrm{Y}_0 - b\mathrm{Z}_0 + f\left[(m_2+1)\mathrm{U}_0 + m_1\mathrm{V}_0 + m\mathrm{W}_0\right]\right\}$$

$$+\frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^3}f\frac{\mathrm{Z}_0}{a},$$

$$\Sigma' = \frac{1}{2\mu}\left\{ c\mathrm{X}_0 + d\mathrm{Y}_0 + b\mathrm{Z}_0 - f\left[(m_2+1)\mathrm{U}_0 + m_1\mathrm{V}_0 + m\mathrm{W}_0\right]\right\}$$

$$-\frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}f\frac{\mathrm{Z}_0}{a},$$

$$\Sigma'' = \frac{1}{2}\left\{ c\mathrm{K}_5 + d\mathrm{M}_5 + b\mathrm{P}_5 - f\left[(m_2+1)\mathrm{L}_5 + m_1\mathrm{N}_5 + m\mathrm{Q}_5\right]\right\} - \frac{m}{2}f\Pi_5,$$

$$\Sigma''' = \frac{1}{2}\left\{ c\mathrm{K}_6 + d\mathrm{M}_6 + b\mathrm{P}_6 + f\left[(m_2+1)\mathrm{L}_6 + m_1\mathrm{N}_6 + m\mathrm{Q}_6\right]\right\} + \frac{m}{2}f\Pi_6,$$

$$\Gamma = -\mathcal{L}\left(\frac{d\Sigma'}{dy}\right)_0 - \left(\mathcal{L}' + \mathcal{L}''\right)\Sigma'_0 + \Sigma''_0,$$

$$\Gamma' = -\mathcal{L}\left(\frac{d\Sigma}{dy}\right)_0 - \left(\mathcal{L}' + \mathcal{L}''\right)\Sigma_0 + \mathfrak{M}\left(\frac{d\Sigma'}{dy}\right)_0 - \left(\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''\right)\Sigma'_0 + \Sigma'''_0.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi \cdot B_1' t^3 + \left(\frac{1}{6}\Phi' + \frac{1}{3}\Gamma\right) A_1' t^2 + \left(\frac{1}{2}\Phi'' + \frac{1}{2}\Gamma'\right) B_1' t^2.$$

6e CAS.

On prend dans R le terme $(T + \overline{T}\gamma'^2)\cos\Omega$, dans R_2 le terme $C\gamma'\cos(\vartheta + \theta')$, et l'on a $\vartheta = \Omega - \theta$.

Soient

$$H = \frac{1}{2\mu^2}\left\{gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s\left[(m_2+1)U_0 + m_1 V_0 + mW_0\right]\right\} + \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2}s\frac{Z_0}{a},$$

$$H' = \frac{1}{2\mu}\left\{gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s\left[(m_2+1)U_0 + m_1 V_0 + mW_0\right]\right\} + \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}s\frac{Z_0}{a},$$

$$H'' = \frac{1}{2}\left\{gK_2 + iM_2 + rP_2 + s\left[(m_2+1)L_2 + m_1 N_2 + mQ_2\right]\right\} + \frac{m}{2}sH_2,$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0 + \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}' + \mathcal{L}''\right)H_0 + \frac{1}{2}\mathcal{M}\left(\frac{dH'}{d\gamma}\right)_0$$
$$- \frac{1}{2}\left(\mathcal{M}' + \mathcal{M}''\right)H_0' + H_0'',$$

$$\Sigma' = -\frac{1}{2\mu}\left\{cX_0 + dY_0 + bZ_0 - f\left[(m_2+1)U_0 + m_1 V_0 + mW_0\right]\right\}$$
$$+ \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}f\frac{Z_0}{a},$$

$$\Sigma'' = \frac{1}{2}\left\{cK_3 + dM_3 + bP_3 + f\left[(m_2+1)L_3 + m_1 N_3 + mQ_3\right]\right\} + \frac{m}{2}fH_3,$$

$$\Gamma = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{d\Sigma'}{d\gamma}\right)_0 + \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}' + \mathcal{L}''\right)\Sigma_0' + \Sigma_0''.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \left(\frac{1}{6}\Phi + \frac{1}{3}\Gamma\right)\left(A^2 + B^2\right)t^3.$$

7e CAS.

On prend dans R le terme $(T + \overline{T}\gamma'^2)\cos\Omega$, dans R_2 le terme $C\gamma'\cos(\vartheta + \theta')$, et l'on a $\vartheta = \Omega + \theta - 2\varpi'$.

Soient

$$\mathrm{H} = -\frac{1}{2\mu^2}\Big\{g\mathrm{X}_0 + i\mathrm{Y}_0 + r\mathrm{Z}_0 + s\left[(m_2 - 1)\mathrm{U}_0 + m_1\mathrm{V}_0 + m\mathrm{W}_0\right]\Big\} - \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2}s\frac{\mathrm{Z}_0}{a},$$

$$\mathrm{H}' = \frac{1}{2\mu}\Big\{g\mathrm{X}_0 + i\mathrm{Y}_0 + r\mathrm{Z}_0 + s\left[(m_2 - 1)\mathrm{U}_0 + m_1\mathrm{V}_0 + m\mathrm{W}_0\right]\Big\} + \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}s\frac{\mathrm{Z}_0}{a},$$

$$\mathrm{H}'' = \frac{1}{2}\Big\{g\mathrm{K}_4 + i\mathrm{M}_4 + r\mathrm{P}_4 - s\left[(m_2 - 1)\mathrm{L}_4 + m_1\mathrm{N}_4 + m\mathrm{Q}_4\right]\Big\} - \frac{m}{2}s\Pi_4,$$

$$\mathrm{H}''' = \frac{1}{2}\Big\{g\mathrm{K}_5 + i\mathrm{M}_5 + r\mathrm{P}_5 + s\left[(m_2 - 1)\mathrm{L}_5 + m_1\mathrm{N}_5 + m\mathrm{Q}_5\right]\Big\} + \frac{m}{2}s\Pi_5,$$

$$\mathrm{H}'''' = \frac{1}{2}\Big\{g\mathrm{K}_6 + i\mathrm{M}_6 + r\mathrm{P}_6 - s\left[(m_2 - 1)\mathrm{L}_6 + m_1\mathrm{N}_6 + m\mathrm{Q}_6\right]\Big\} - \frac{m}{2}s\Pi_6,$$

$$\Phi = -\mathcal{L}\left(\frac{d\mathrm{H}'}{dy}\right)_0 - \left(\mathcal{L}' - \mathcal{L}''\right)\mathrm{H}'_0 + \mathrm{H}''_0,$$

$$\Phi' = -\mathcal{L}\left(\frac{d\mathrm{H}}{dy}\right)_0 - \left(\mathcal{L}' - \mathcal{L}''\right)\mathrm{H}_0 - \mathfrak{M}\left(\frac{d\mathrm{H}}{dy}\right)_0 + \left(\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}''\right)\mathrm{H}_0 + \mathrm{H}'''_0.$$

$$\Phi'' = \mathfrak{M}\left(\frac{d\mathrm{H}}{dy}\right)_0 - \left(\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}''\right)\mathrm{H}_0 + \mathrm{H}''''_0.$$

$$\Sigma = \frac{1}{2\mu^2}\Big\{c\mathrm{X}_0 + d\mathrm{Y}_0 + b\mathrm{Z}_0 - f\left[(m_2 - 1)\mathrm{U}_0 + m_1\mathrm{V}_0 + m\mathrm{W}_0\right]\Big\} - \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2}f\frac{\mathrm{Z}_0}{a},$$

$$\Sigma' = -\frac{1}{2\mu}\Big\{c\mathrm{X}_0 + d\mathrm{Y}_0 + b\mathrm{Z}_0 - f\left[(m_2 - 1)\mathrm{U}_0 + m_1\mathrm{V}_0 + m\mathrm{W}_0\right]\Big\} - \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}f\frac{\mathrm{Z}_0}{a},$$

$$\Sigma'' = -\frac{1}{2}\Big\{c\mathrm{K}_5 + d\mathrm{M}_5 + b\mathrm{P}_5 - f\left[(m_2 - 1)\mathrm{L}_5 + m_1\mathrm{N}_5 + m\mathrm{Q}_5\right]\Big\} + \frac{m}{2}f\Pi_5,$$

$$\Sigma''' = \frac{1}{2}\Big\{c\mathrm{K}_6 + d\mathrm{M}_6 + b\mathrm{P}_6 + f\left[(m_2 - 1)\mathrm{L}_6 + m_1\mathrm{N}_6 + m\mathrm{Q}_6\right]\Big\} + \frac{m}{2}f\Pi_6,$$

$$\Gamma = -\mathcal{L}\left(\frac{d\Sigma}{dy}\right)_0 - \left(\mathcal{L}' - \mathcal{L}''\right)\Sigma'_0 + \Sigma''_0.$$

$$\Gamma' = -\mathcal{L}\left(\frac{d\Sigma}{dy}\right)_0 - \left(\mathcal{L}' - \mathcal{L}''\right)\Sigma_0 + \mathfrak{M}\left(\frac{d\Sigma}{dy}\right)_0 - \left(\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}''\right)\Sigma_0 + \Sigma'''_0.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi\cdot\mathrm{B}'_1 t^4 + \left(\frac{1}{6}\Phi' + \frac{1}{3}\Gamma\right)\mathrm{A}'_1 t^3 + \left(\frac{1}{2}\Phi'' + \frac{1}{2}\Gamma'\right)\mathrm{B}_1 t^2.$$

8e CAS.

On prend dans R le terme $T\gamma'\cos(\Psi+\theta')$, dans R_2 le terme $(C+\bar{C}\gamma'^2)\cos \psi$, et l'on a $\psi=\Psi+\theta$.

Soient

$$H=-\frac{1}{2\mu}\left\{gX_0+iY_0+rZ_0+s\left[(m_2-1)U_0+m_1V_0+mW_0\right]\right\}-\frac{3m}{4}\frac{n}{\mu'}s\frac{Z_0}{a},$$

$$H'=\frac{1}{2}\left\{gK_0+iM_0+rP_0-s\left[(m_2-1)L_0+m_1N_0+mQ_0\right]\right\}-\frac{m}{2}sH_0,$$

$$\Phi=\frac{1}{2}\mathfrak{M}\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0-\frac{1}{2}\left(\mathfrak{M}'-\mathfrak{M}''\right)H_0+H'_0,$$

$$\Sigma=\frac{1}{2\mu}\left\{-cX_0-dY_0-bZ_0+f\left[(m_2-1)U_0+m_1V_0+mW_0\right]\right\}+\frac{3m}{4}\frac{n}{\mu'}f\frac{Z_0}{a},$$

$$\Sigma'=\frac{1}{2}\left\{-cK_0-dM_0-bP_0+f\left[(m_2-1)L_0+m_1N_0+mQ_0\right]\right\}+\frac{m}{2}fH_0,$$

$$\Gamma=\frac{1}{2}\mathfrak{P}\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0+\frac{1}{2}\left(\mathfrak{P}'-\mathfrak{P}''\right)\Sigma_0+\Sigma'_0.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l=\left(\frac{1}{6}\Phi+\frac{1}{3}\Gamma\right)\left(A^2+B^2\right)t^3.$$

9e CAS.

On prend dans R le terme $T\gamma'\cos(\Psi+\theta')$, dans R_2 le terme $(C+\bar{C}\gamma'^2)\cos \psi$, et l'on a $\psi=\Psi-\theta+2\varpi'$.

Soient

$$H=-\frac{1}{2\mu}\left\{gX_0+iY_0+rZ_0+s\left[(m_2+1)U_0+m_1V_0+mW_0\right]\right\}-\frac{3m}{4}\frac{n}{\mu'}s\frac{Z_0}{a},$$

$$H' = -gK_5 - iM_5 - rP_5 + s\left[(m_2+1)L_5 + m_1N_5 + mQ_5\right] + msH_5,$$

$$H'' = -gK_8 - iM_8 - rP_8 - s\left[(m_2+1)L_8 + m_1N_8 + mQ_8\right] - msH_8,$$

$$\Phi = -\mathfrak{L}\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0 - (\mathfrak{L}' + \mathfrak{L}'')H_0 + H_0'',$$

$$\Phi' = -\mathfrak{M}\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0 + (\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'')H_0 + H_0',$$

$$\Sigma = \frac{1}{2\mu}\left\{-cX_0 - dY_0 - bZ_0 + f\left[(m_2+1)U_0 + m_1V_0 + mW_0\right]\right\} + \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}f\frac{Z}{a},$$

$$\Sigma' = -cK_5 - dM_5 - bP_5 - f\left[(m_2+1)L_5 + m_1N_5 + mQ_5\right] - mfH_5,$$

$$\Sigma'' = cK_8 + dM_8 + bP_8 - f\left[(m_2+1)L_8 + m_1N_8 + mQ_8\right] - mfH_8,$$

$$\Gamma = \mathfrak{L}\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0 + (\mathfrak{L}' + \mathfrak{L}'')\Sigma_0 + \Sigma_0',$$

$$\Gamma' = -\mathfrak{M}\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0 + (\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'')\Sigma_0 + \Sigma_0.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi \cdot B_1' t^4 + \left(\frac{1}{6}\Phi' + \frac{1}{3}\Gamma\right)A_1' t^3 + \frac{1}{2}\Gamma' \cdot B_1 t^2.$$

10ᵉ CAS.

On prend dans R le terme $T\gamma' \cos(\Psi - \theta')$, dans R_2 le terme $(C + \bar{C}\gamma'^2)\cos \mathcal{A}$, et l'on a $\mathcal{A} = \Psi - \theta$.

Soient

$$H = \frac{1}{2\mu}\left\{gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s\left[(m_2+1)U_0 + m_1V_0 + mW_0\right]\right\} + \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}s\frac{Z}{a},$$

$$H' = \frac{1}{2}\left\{-gK_5 - iM_5 - rP_5 + s\left[(m_2+1)L_5 + m_1N_5 + mQ_5\right]\right\} + \frac{m}{2}sH_5,$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\mathfrak{M}\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0 - \frac{1}{2}(\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'')H_0 + H_0,$$

$$\Sigma = \frac{1}{2\mu}\Big\{ -cX_0 - dY_0 - bZ_0 + f\left[(m_2+1)U_0 + m_1V_0 + mW_0\right]\Big\} + \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2} f \frac{Z_0}{a},$$

$$\Sigma' = \frac{1}{2}\Big\{ cK_8 + dM_8 + bP_8 - f\left[(m_2+1)L_8 + m_1N_8 + mQ_8\right]\Big\} - \frac{m}{2} f\Pi_8,$$

$$\Gamma = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0 + \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}' + \mathcal{L}''\right)\Sigma_0 + \Sigma'_0.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \left(\frac{1}{6}\Phi + \frac{1}{3}\Gamma\right)\left(A^2 + B^2\right)t^3.$$

11ᵉ CAS.

On prend dans R le terme $T\gamma'\cos(\Psi - \theta')$, dans R_2 le terme $(C + \bar{C}\gamma'^2)\cos \mathcal{A}$, et l'on a $\mathcal{A} = \Psi + \theta - 2\varpi'$.

Soient

$$H = \frac{1}{2\mu}\Big\{ gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s\left[(m_2-1)U_0 + m_1V_0 + mW_0\right]\Big\} + \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2} s \frac{Z_0}{a},$$

$$H' = gK_6 + iM_6 + rP_6 - s\left[(m_2-1)L_6 + m_1N_6 + m_2P_6\right] - ms\Pi_6,$$

$$H'' = -gK_7 - iM_7 - rP_7 - s\left[(m_2-1)L_7 + m_1N_7 + mQ_7\right] - ms\Pi_7,$$

$$\Phi = -\mathcal{L}\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0 - \left(\mathcal{L}' - \mathcal{L}''\right)H_0 + H''_0,$$

$$\Phi' = -\mathfrak{M}\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0 - \left(\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}''\right)H_0 + H'_0,$$

$$\Sigma = \frac{1}{2\mu}\Big\{ -cX_0 - dY_0 - bZ_0 + f\left[(m_2-1)U_0 + m_1V_0 + mW_0\right]\Big\} + \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2} f \frac{Z_0}{a},$$

$$\Sigma' = -cK_6 - dM_6 - bP_6 - f\left[(m_2-1)L_6 + m_1N_6 + mQ_6\right] - mf\Pi_6,$$

$$\Sigma'' = -cK_7 - dM_7 - bP_7 + f\left[(m_2-1)L_7 + m_1N_7 + mQ_7\right] + mf\Pi_7,$$

$$\Gamma = -\mathcal{L}\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0 + \left(\mathcal{L}' - \mathcal{L}''\right)\Sigma_0 + \Sigma''_0,$$

$$\Gamma' = -\mathfrak{M}\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0 - \left(\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}''\right)\Sigma_0 + \Sigma'_0.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi\cdot B_1' t^4 + \left(\frac{1}{6}\Phi' + \frac{1}{3}\Gamma\right) A_1' t^3 + \frac{1}{2}\Gamma'\cdot B_1' t^2.$$

12e CAS.

On prend dans R le terme $(T + \overline{T}\gamma'^2)\cos\Omega$, dans R_2 le terme $C\gamma'^2\cos(b - 2\theta')$, et l'on a $b = \Omega + 2\varpi'$.

Soient

$$\Phi = \frac{1}{\mu}\left[g_0X_0 + i_0Y_0 + r_0Z_0 + s_0(m_2U_0 + m_1V_0 + mW_0)\right] + \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2}s_0\frac{Z_0}{a},$$

$$\Phi' = \frac{2}{\mu^2}\left[g_0X_0 + i_0Y_0 + r_0Z_0 + s_0(m_2U_0 + m_1V_0 + mW_0)\right] + 6m\frac{n}{\mu^2}s_0\frac{Z_0}{a},$$

$$\Phi'' = -\frac{2}{\mu^3}\left[g_0X_0 + i_0Y_0 + r_0Z_0 + s_0(m_2U_0 + m_1V_0 + mW_0)\right]$$
$$- 9m\frac{n}{\mu^2}s_0\frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma = \frac{1}{\mu}\left[-c_0X_0 - d_0Y_0 - b_0Z_0 + f_0(m_2U_0 + m_1V_0 + mW_0)\right] + \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2}f_0\frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma' = \frac{2}{\mu^2}\left[c_0X_0 + d_0Y_0 + b_0Z_0 - f_0(m_2U_0 + m_1V_0 + mW_0)\right] - 6m\frac{n}{\mu^2}f_0\frac{Z_0}{a}.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi\cdot B_1' t^4 + \left(\frac{1}{6}\Phi' + \frac{1}{3}\Gamma\right) A_1' t^3 + \left(\frac{1}{2}\Phi'' + \frac{1}{2}\Gamma'\right) B_1' t^2.$$

13e CAS.

On prend dans R le terme $(T + \overline{T}\gamma'^2)\cos\Omega$, dans R_2 le terme $C\gamma'^2\cos(b + 2\theta')$, et l'on a $b = \Omega - 2\varpi'$.

Soient

$$\Phi = -\frac{1}{\mu}\left[g_0X_0 + i_0Y_0 + r_0Z_0 + s_0(m_2U_0 + m_1V_0 + mW_0)\right] - \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2}s_0\frac{Z_0}{a},$$

$$\Phi' = \frac{2}{\mu^2}\left[g_0X_0 + i_0Y_0 + r_0Z_0 + s_0(m_2U_0 + m_1V_0 + mW_0)\right] + 6m\frac{n}{\mu^2}s_0\frac{Z_0}{a}.$$

$$\Phi'' = \frac{2}{\mu^2}\left[g_0 X_0 + i_0 Y_0 + r_0 Z_0 + s_0 (m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)\right] + 9m \frac{n}{\mu^2} s_0 \frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma'' = \frac{1}{\mu}\left[-c_0 X_0 - d_0 Y_0 - b_0 Z_0 + f_0 (m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)\right] + \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2} f_0 \frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma' = \frac{2}{\mu^2}\left[-c_0 X_0 - d_0 Y_0 - b_0 Z_0 + f_0 (m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)\right]$$
$$+ 6m \frac{n}{\mu^2} f_0 \frac{Z_0}{a}.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi \cdot B_1' t^4 + \left(\frac{1}{6}\Phi' + \frac{1}{3}\Gamma\right) A_1' t^3 + \left(\frac{1}{2}\Phi'' + \frac{1}{2}\Gamma''\right) B_1' t^2.$$

14[e] CAS.

On prend dans R le terme $T\gamma'^2 \cos(\psi + 2\theta')$, dans R_2 le terme $(C + \bar{C}\gamma'^2)\cos \mathfrak{A}$, et l'on a $\mathfrak{A} = \psi + 2\varpi'$.

Soient

$$\Phi = \frac{1}{\mu}\left[g_0 X_0 + i_0 Y_0 + r_0 Z_0 + s_0 (m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)\right] + \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2} s_0 \frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma = \frac{1}{\mu}\left[-c_0 X_0 - d_0 Y_0 - b_0 Z_0 + f_0 (m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)\right] + \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2} f_0 \frac{Z_0}{a}.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi \cdot B_1 t^4 + \frac{1}{3}\Gamma \cdot A_1' t^3.$$

15[e] CAS.

On prend dans R le terme $T\gamma'^2 \cos(\psi - 2\theta')$, dans R_2 le terme $(C + \bar{C}\gamma'^2)\cos \mathfrak{A}$, et l'on a $\mathfrak{A} = \psi - 2\varpi'$.

Soient

$$\Phi = -\frac{1}{\mu}\left[g_0 X_0 + i_0 Y_0 + r_0 Z_0 + s_0 (m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)\right] - \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2} s_0 \frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma = \frac{1}{\mu}\left[-c_0 X_0 - d_0 Y_0 - b_0 Z_0 + f_0 (m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)\right] + \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2} f_0 \frac{Z_0}{a}.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi \cdot B'_1 t^3 + \frac{1}{3}\Gamma \cdot A'_1 t^3.$$

16ᵉ CAS.

On prend dans R le terme $T\gamma' \cos(\Psi + \theta')$, dans R_2 le terme $C\gamma' \cos(\vartheta + \theta')$, et l'on a $\vartheta = \Psi$.

Soient

$$\Phi = \frac{1}{2\mu^2}\left[g_0 X_0 + i_0 Y_0 + r_0 Z_0 + s_0 (m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)\right] + \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2} s_0 \frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma = \frac{1}{2\mu}\left[-c_0 X_0 - d_0 Y_0 - b_0 Z_0 + f_0 (m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)\right] + \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2} f_0 \frac{Z_0}{a}.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \left(\frac{1}{6}\Phi + \frac{1}{3}\Gamma\right)\left(A^2 + B^2\right) t^3.$$

17ᵉ CAS.

On prend dans R le terme $T\gamma' \cos(\Psi - \theta')$, dans R_2 le terme $C\gamma' \cos(\vartheta - \theta')$, et l'on a $\vartheta = \Psi$.

Soient

$$\Phi = \frac{1}{2\mu^2}\left[g_0 X_0 + i_0 Y_0 + r_0 Z_0 + s_0 (m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)\right] + \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2} s_0 \frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma = \frac{1}{2\mu}\left[-c_0 X_0 - d_0 Y_0 - b_0 Z_0 + f_0 (m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)\right] + \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2} f_0 \frac{Z_0}{a}.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combi-

naison considérée sera

$$\delta_2 l = \left(\tfrac{1}{6}\Phi + \tfrac{1}{3}\Gamma\right)\left(A^2 + B^2\right)t^3.$$

18ᵉ CAS.

On prend dans R le terme $T\gamma' \cos(\Psi + \theta')$, dans R_2 le terme $C\gamma' \cos(\mathcal{B} - \theta')$, et l'on a $\mathcal{B} = \Psi + 2\varpi'$.

Soient

$$\Phi = \frac{1}{\mu}\left[g_0 X_0 + i_0 Y_0 + r_0 Z_0 + s_0 (m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)\right] + \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^3} s_0 \frac{Z_0}{a},$$

$$\Phi' = \frac{1}{\mu^2}\left[g_0 X_0 + i_0 Y_0 + r_0 Z_0 + s_0 (m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)\right] + 3m \frac{n}{\mu^3} s_0 \frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma = \frac{1}{\mu}\left[-c_0 X_0 - d_0 Y_0 - b_0 Z_0 + f_0 (m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)\right] + \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2} f_0 \frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma' = \frac{1}{\mu^2}\left[c_0 X_0 + d_0 Y_0 + b_0 Z_0 - f_0 (m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)\right] - 3m \frac{n}{\mu^3} f_0 \frac{Z_0}{a}.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \tfrac{1}{12}\Phi \cdot B_1' t^4 + \left(\tfrac{1}{6}\Phi' + \tfrac{1}{3}\Gamma\right) A_1' t^3 + \tfrac{1}{2}\Gamma' \cdot B_1' t^2.$$

19ᵉ CAS.

On prend dans R le terme $T\gamma' \cos(\Psi - \theta')$, dans R_2 le terme $C\gamma' \cos(\mathcal{B} + \theta')$, et l'on a $\mathcal{B} = \Psi - 2\varpi'$.

Soient

$$\Phi = -\frac{1}{\mu}\left[g_0 X_0 + i_0 Y_0 + r_0 Z_0 + s_0 (m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)\right] - \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^3} s_0 \frac{Z_0}{a},$$

$$\Phi' = \frac{1}{\mu^2}\left[g_0 X_0 + i_0 Y_0 + r_0 Z_0 + s_0 (m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)\right] + 3m \frac{n}{\mu^3} s_0 \frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma = \frac{1}{\mu}\left[-c_0 X_0 - d_0 Y_0 - b_0 Z_0 + f_0 (m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)\right] + \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2} f_0 \frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma' = \frac{1}{\mu^2}\left[-c_0 X_0 - d_0 Y_0 - b_0 Z_0 + f_0 (m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)\right] + 3m \frac{n}{\mu^3} \frac{Z_0}{a}.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi\cdot B_1' t^4 + \left(\frac{1}{6}\Phi' + \frac{1}{3}\Gamma\right) A_1' t^3 + \frac{1}{2}\Gamma'\cdot B_1' t^2.$$

Avant d'appliquer ces formules aux diverses combinaisons que comprennent les 19 cas, faisons encore quelques remarques propres à simplifier l'écriture des résultats. Posons $\frac{n'}{n} = \alpha$; α sera une fraction comparable aux quantités e, e', γ, $\sqrt{\frac{a}{a'}}$, et nous la regarderons comme étant aussi du premier degré. Ajoutons que le rapport $\frac{M}{m'}$ de la masse de la Terre à celle du Soleil doit être considéré comme une quantité du quatrième degré; c'est ce qu'on peut exprimer en posant $\varepsilon = 1 - \omega^4$, ω étant du premier degré. Observons enfin que les parties cherchées de $\delta_2 l$, renfermant l'un des facteurs $A^2 + B^2$, A_1', B_1', sont du second ordre, et qu'ainsi dans les valeurs de h_0, h^0, j^0, k^0 qui doivent y être substituées, on peut négliger les quantités du second ordre; nous pourrons donc écrire (voir p. 28 et 29)

$$h_0 = h^0 = -\frac{3}{4} n\alpha^2 \left[1 + (2)\right], \qquad j = \frac{3}{4} n\alpha^2 \left[1 + (2)\right].$$

$$k = -n\alpha^2 [1 + (2)].$$

On voit aisément, d'après cela, que les diverses parties non périodiques de $\delta_2 l$ se présenteront sous l'une des quatre formes

$$n'^2 G B_1' t^4, \quad n' G' A_1' t^3, \quad n' G'' (A^2 + B^2) t^3, \quad G''' B_1' t^2,$$

G, G', G'', G''' désignant des polynômes à coefficients numériques ordonnés suivant les puissances de γ_0, e, e', $\sqrt{\frac{a}{a'}}$, α, ω. On reconnait de plus que le degré d'approximation avec lequel nous avons calculé chaque terme du développement de R permet d'obtenir dans G les termes du cinquième degré, dans G' et dans G'' ceux du quatrième, dans G''' ceux du troisième.

Il sera donc inutile d'avoir égard aux combinaisons qui fourniraient dans $\delta_2 l$ des parties non périodiques où les polynômes G, G', G", G‴ auraient tous leurs termes de degrés supérieurs respectivement aux nombres 5, 4, 4, 3. Ces combinaisons, qui ne donneraient que des termes négligeables, étant mises de côté, il nous en restera 160, et nous allons transcrire pour chacune de ces dernières la partie non périodique qu'elle fournit dans $\delta_2 l$.

PARTIE NON PÉRIODIQUE DE $\delta_2 l$ [1].

1 1 $\left(\frac{1191}{2}\alpha^2 + \frac{1005}{16}\alpha^3\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

5 5 $+\frac{19}{2}\alpha^2\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

8 8 $+\left(-\frac{513}{8}\alpha^2 - \frac{675}{4}\alpha^3\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

9 9 $+\left(\frac{19}{8}\alpha^2 + \frac{25}{12}\alpha^3\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

31 31 $+\frac{825}{16}\alpha e^2\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

33 33 $-\frac{45}{32}\alpha^2\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

34 34 $+\left(-\frac{9}{8}\alpha + \frac{567}{2048}\alpha^3 + 18\alpha\gamma_0^2 - \frac{51}{16}\alpha e^2 + \frac{45}{8}\alpha e'^2\right)$
$\times n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

94 94 $-\frac{9}{16}\alpha e'^2\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

95 95 $-\frac{147}{16}\alpha e'^2\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

1 213
$$\left\{\begin{aligned}&+\left(-\frac{405}{64} - \frac{81}{8}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2 e'^2 B_1' t^3\\ &+\left(\frac{135}{4} + 54\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2 A_1' t^3\\ &+\left(\frac{135}{2} + 108\alpha\right)\cdot e'^2 B_1' t^2\end{aligned}\right.$$

[1] Les deux nombres entiers placés à la gauche de chaque portion indiquent la combinaison dont cette portion provient.

$$4 \quad 94 \left\{ \begin{array}{l} -\frac{27}{8}\alpha \cdot n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \\ -\frac{27}{2}\alpha \cdot e'^2 B'_1 t^2 \end{array} \right.$$

$$6 \quad 91 \left\{ \begin{array}{l} +\left(\frac{135}{64}+\frac{27}{16}\alpha\right) \cdot n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4 \\ +\left(-\frac{45}{4}-9\alpha\right) \cdot n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \\ +\left(-\frac{45}{2}-18\alpha\right) \cdot e'^2 B'_1 t^2 \end{array} \right.$$

$$22 \quad 34 \left\{ \begin{array}{l} +\frac{81}{16}\alpha \cdot n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \\ +\frac{81}{4}\alpha \cdot e'^2 B'_1 t^2 \end{array} \right.$$

$$23 \quad 221 \left\{ \begin{array}{l} +\left(\frac{9}{32}-\frac{9}{32}\alpha\right) \cdot n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4 \\ +\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\alpha\right) \cdot n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \\ +\left(-3+3\alpha\right) \cdot e'^2 B'_1 t^2 \end{array} \right.$$

$$27 \quad 215 \left\{ \begin{array}{l} +\left(-\frac{243}{64}-\frac{243}{64}\alpha\right) \cdot n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4 \\ +\left(\frac{81}{4}+\frac{81}{4}\alpha\right) \cdot n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \\ +\left(\frac{81}{2}+\frac{81}{2}\alpha\right) \cdot e'^2 B'_1 t^2 \end{array} \right.$$

$$29 \quad 217 \left\{ \begin{array}{l} +\left(\frac{27}{64}+\frac{9}{64}\alpha\right) \cdot n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4 \\ +\left(-\frac{9}{4}-\frac{3}{4}\alpha\right) \cdot n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \\ +\left(-\frac{9}{2}-\frac{3}{2}\alpha\right) \cdot e'^2 B'_1 t^2 \end{array} \right.$$

$$75 \quad 96 \left\{ \begin{array}{l} +\left(-\frac{27}{32}+\frac{27}{16}\alpha\right) \cdot n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4 \\ +\left(\frac{9}{2}-9\alpha\right) \cdot n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \\ +\left(9-18\alpha\right) \cdot e'^2 B'_1 t^2 \end{array} \right.$$

$$97 \quad 76 \left\{ \begin{array}{l} +\left(-\frac{27}{32}-\frac{27}{16}\alpha\right) \cdot n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4 \\ +\left(\frac{9}{2}+9\alpha\right) \cdot n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \\ +\left(9+18\alpha\right) \cdot e'^2 B'_1 t^2 \end{array} \right.$$

$$223 \quad 24 \quad \left\{\begin{array}{l} +\left(\frac{9}{32}+\frac{9}{32}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4 \\ +\left(-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2A'_1t^3 \\ +\left(-3-3\alpha\right)\cdot e'^2B'_1t^2 \end{array}\right.$$

$$24 \quad 223 \quad \left\{\begin{array}{l} +\left(-\frac{9}{32}-\frac{9}{32}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4 \\ +\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2A'_1t^3 \\ +\left(3+3\alpha\right)\cdot e'^2B'_1t^2 \end{array}\right.$$

$$34 \quad 22 \quad \left\{\begin{array}{l} +\frac{81}{16}\alpha\cdot n'\alpha e'^2A'_1t^3 \\ +\frac{81}{4}\alpha\cdot e'^2B'_1t^2 \end{array}\right.$$

$$76 \quad 97 \quad \left\{\begin{array}{l} +\left(\frac{27}{32}+\frac{27}{16}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4 \\ +\left(-\frac{9}{2}-9\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2A'_1t^3 \\ +\left(-9-18\alpha\right)\cdot e'^2B'_1t^2 \end{array}\right.$$

$$91 \quad 6 \quad \left\{\begin{array}{l} +\left(-\frac{135}{64}-\frac{27}{16}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4 \\ +\left(\frac{45}{4}+9\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2A'_1t^3 \\ +\left(\frac{45}{2}+18\alpha\right)\cdot e'^2B'_1t^2 \end{array}\right.$$

$$94 \quad 4 \quad \left\{\begin{array}{l} -\frac{27}{8}\alpha\cdot n'\alpha e'^2A'_1t^3 \\ -\frac{27}{2}\alpha\cdot e'^2B'_1t^2 \end{array}\right.$$

$$96 \quad 75 \quad \left\{\begin{array}{l} +\left(\frac{27}{32}-\frac{27}{16}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4 \\ +\left(-\frac{9}{2}+9\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2A'_1t^3 \\ +\left(-9+18\alpha\right)\cdot e'^2B'_1t^2 \end{array}\right.$$

$$213 \quad 1 \quad \left\{\begin{array}{l} +\left(\frac{405}{64}+\frac{81}{8}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4 \\ +\left(-\frac{135}{4}-54\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2A'_1t^3 \\ +\left(-\frac{135}{2}-108\alpha\right)\cdot e'^2B'_1t^2 \end{array}\right.$$

215 27
$$\left\{\begin{aligned}&+\left(\frac{243}{64}+\frac{243}{64}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4\\&+\left(-\frac{81}{4}-\frac{81}{4}\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2 A'_1 t^3\\&+\left(-\frac{81}{2}-\frac{81}{2}\alpha\right)\cdot e'^2 B'_1 t^2\end{aligned}\right.$$

217 29
$$\left\{\begin{aligned}&+\left(-\frac{27}{64}-\frac{9}{64}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4\\&+\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2 A'_1 t^3\\&+\left(\frac{9}{2}+\frac{3}{2}\alpha\right)\cdot e'^2 B'_1 t^2\end{aligned}\right.$$

221 23
$$\left\{\begin{aligned}&+\left(-\frac{9}{32}+\frac{9}{32}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4\\&+\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2 A'_1 t^3\\&+\left(3-3\alpha\right)\cdot e'^2 B'_1 t^2\end{aligned}\right.$$

4 41 $-\frac{81}{16}\alpha e'^2\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

5 43 $+\left(-1-5\alpha^2+14\gamma_0^2-\frac{3}{2}e^2-\frac{3}{2}e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

23 115 $+\left(-\frac{9}{4}e'^2+\frac{9}{4}\alpha e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

24 116 $+\left(-\frac{9}{4}e'^2-\frac{9}{4}\alpha e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

25 119 $-\frac{1}{4}e^2\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

31 111 $-\frac{225}{8}\alpha e^2\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^2$

33 12 $+\left(\frac{3}{2}+\frac{21}{8}\alpha^2+24\gamma_0^2-\frac{39}{4}e^2+\frac{9}{4}e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

34 13 $+\Big(\frac{9}{8}\alpha-\frac{27}{256}\alpha^2-\frac{405}{2048}\alpha^3-\frac{117}{8}\alpha\gamma_0^2+\frac{51}{16}\alpha e^2$
$-\frac{45}{8}\alpha e'^2\Big)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

90 45 $+\left(\frac{27}{8}e'^2-\frac{27}{16}\alpha e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

91 46 $+\left(\frac{27}{8}e'^2+\frac{27}{16}\alpha e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

92 47 $+\left(\frac{27}{2}e^2-54\gamma_0^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

93 48 $+\left(\frac{3}{2}e^2+6\gamma_0^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

94 49 $+\frac{9}{16}\alpha e'^2\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

95 50 $+\frac{147}{16}\alpha e'^2\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

96 51 $+\left(\frac{3}{2}e^2+6\gamma_0^2-3\alpha e^2-12\alpha\gamma_0^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

1 122 $\left\{\begin{array}{l}+\left(\frac{243}{16}+\frac{729}{32}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B_1't^3\\ +\left(-\frac{81}{2}-\frac{243}{4}\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2A_1't^3\end{array}\right.$

4 49 $\left\{\begin{array}{l}+\frac{27}{8}\alpha\cdot n'\alpha e'^2A_1't^3\\ +\frac{27}{4}\alpha\cdot e'^2B_1't^2\end{array}\right.$

6 46 $\left\{\begin{array}{l}+\left(-\frac{81}{16}-\frac{243}{64}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B_1't^4\\ +\left(\frac{27}{2}+\frac{81}{8}\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2A_1't^3\end{array}\right.$

8 273 $\left\{\begin{array}{l}+\left(-\frac{729}{32}-\frac{729}{16}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B_1't^4\\ +\left(\frac{243}{4}+\frac{243}{2}\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2A_1't^3\end{array}\right.$

9 275 $\left\{\begin{array}{l}+\left(\frac{81}{32}+\frac{27}{16}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B_1't^3\\ +\left(-\frac{27}{4}-\frac{9}{2}\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2A_1't^3\end{array}\right.$

22 13 $\left\{\begin{array}{l}-\frac{81}{16}\alpha\cdot n'\alpha e'^2A_1't^3\\ -\frac{81}{8}\alpha\cdot e'^2B_1't^2\end{array}\right.$

23 130 $\left\{\begin{array}{l}+\left(-\frac{9}{16}+\frac{9}{16}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B_1't^4\\ +\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2A_1't^3\end{array}\right.$

27 124 $\left\{\begin{array}{l}+\left(\frac{243}{32}+\frac{243}{32}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B_1't^3\\ +\left(-\frac{81}{4}-\frac{81}{4}\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2A_1't^3\end{array}\right.$

29 126 $\left\{\begin{array}{l} +\left(-\frac{27}{32}-\frac{9}{32}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^3 \\ +\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \end{array}\right.$

75 51 $\left\{\begin{array}{l} +\left(\frac{27}{16}-\frac{27}{8}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^3 \\ +\left(-\frac{9}{2}+9\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \end{array}\right.$

1 10 $+\left(9+\frac{27}{2}\alpha+\frac{123}{16}\alpha^2-27\gamma_o^2-\frac{225}{4}e^2-\frac{117}{2}e'^2+\frac{213}{16}\alpha^3\right.$
$\left.-45\alpha\gamma_o^2-\frac{351}{4}\alpha e^2-\frac{351}{4}\alpha e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

4 42 $+\frac{81}{16}\alpha e'^2\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

5 44 $+\left(1-\frac{3}{2}\alpha^2-14\gamma_o^2-\frac{3}{2}e^2+\frac{3}{2}e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

6 37 $+\left(\frac{9}{4}e'^2+\frac{27}{16}\alpha e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

7 38 $+\left(\frac{441}{4}e'^2+\frac{3969}{16}\alpha e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

8 39 $+\left(-\frac{27}{2}-27\alpha-\frac{27}{2}\alpha^2+54\gamma_o^2+90e^2+\frac{351}{4}e'^2+\frac{27}{4}\alpha^3\right.$
$\left.+108\alpha\gamma_o^2+\frac{441}{2}\alpha e^2+\frac{351}{2}\alpha e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

9 40 $+\left(\frac{3}{2}+\alpha+\frac{11}{2}\alpha^2-6\gamma_o^2-6e^2-\frac{39}{4}e'^2+\frac{49}{36}\alpha^3-4\alpha\gamma_o^2\right.$
$\left.+\frac{1}{2}\alpha e^2-\frac{13}{2}\alpha e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

23 117 $+\left(\frac{9}{4}e'^2-\frac{9}{4}\alpha e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

24 118 $+\left(\frac{9}{4}e'^2+\frac{9}{4}\alpha e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

25 120 $+\frac{1}{4}e^2\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

27 107 $+\left(-\frac{27}{8}e'^2-\frac{27}{8}\alpha e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

28 108 $+\left(-\frac{1323}{8}e'^2-\frac{3969}{8}\alpha e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

29 109 $+\left(\frac{3}{8}e'^2+\frac{1}{8}\alpha e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

30 110 $+\left(\frac{147}{4}e'^2+\frac{147}{8}\alpha e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

32 112 $+\left(6e^2+3\alpha e^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

33 136 $+9\gamma_o^2\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

97 52 $+\left(\frac{3}{2}e^2-6\gamma_o^2+3\alpha e^2-12\alpha\gamma_o^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

24 132 $\left\{\begin{array}{l} +\left(\frac{9}{16}+\frac{9}{16}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B_1't^4 \\ +\left(-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2A_1't^3 \end{array}\right.$

34 114 $\left\{\begin{array}{l} -\frac{81}{16}\alpha\cdot n'\alpha e'^2A_1't^3 \\ -\frac{81}{8}\alpha\cdot e'^2B_1't^2 \end{array}\right.$

76 52 $\left\{\begin{array}{l} +\left(-\frac{27}{16}-\frac{27}{8}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B_1't^4 \\ +\left(\frac{9}{2}+9\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2A_1't^3 \end{array}\right.$

91 37 $\left\{\begin{array}{l} +\left(-\frac{27}{32}-\frac{27}{64}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B_1't^4 \\ +\left(\frac{9}{4}+\frac{9}{8}\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2A_1't^3 \end{array}\right.$

94 42 $\left\{\begin{array}{l} +\frac{27}{8}\alpha\cdot n'\alpha e'^2A_1't^3 \\ +\frac{27}{4}\alpha\cdot e'^2B_1't^2 \end{array}\right.$

213 10 $\left\{\begin{array}{l} +\left(\frac{81}{32}+\frac{81}{32}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B_1't^4 \\ +\left(-\frac{27}{4}-\frac{27}{4}\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2A_1't^3 \end{array}\right.$

10 1 $+\Big(-9-\frac{27}{2}\alpha-\frac{693}{16}\alpha^2+27\gamma_o^2+\frac{225}{4}e^2+\frac{117}{2}e'^2$

$-\frac{297}{4}\alpha^3+45\alpha\gamma_o^2+\frac{351}{4}\alpha e^2+\frac{351}{4}\alpha e'^2\Big)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

37 6 $+\left(-\frac{9}{4}e'^2-\frac{27}{16}\alpha e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

38 7 $+\left(-\frac{441}{4}e'^2-\frac{3969}{16}\alpha e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

39 8 $+\Big(\frac{27}{2}+27\alpha+\frac{621}{8}\alpha^2-54\gamma_o^2-90e^2-\frac{351}{4}e'^2+162\alpha^3$

$-108\alpha\gamma_o^2-\frac{441}{2}\alpha e^2-\frac{351}{2}\alpha e'^2\Big)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

40	9	$+\left(-\frac{3}{2}-\alpha-\frac{79}{24}\alpha^2+6\gamma_o^2+6e^2+\frac{39}{4}e'^2-\frac{31}{9}\alpha^3+4\alpha\gamma_o^2 -\frac{1}{2}\alpha e^2+\frac{13}{2}\alpha e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$
42	4	$+\frac{189}{32}\alpha e'^2\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$
44	5	$+\left(-1-\frac{13}{4}\alpha^2+14\gamma_o^2+\frac{3}{2}e^2-\frac{3}{2}e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$
52	97	$+\left(6\gamma_o^2-\frac{3}{2}e^2+12\alpha\gamma_o^2-3\alpha e^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$
107	27	$+\left(\frac{27}{8}e'^2+\frac{27}{8}\alpha e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$
108	28	$+\left(\frac{1323}{8}e'^2+\frac{3969}{8}\alpha e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$
109	29	$+\left(-\frac{3}{8}e'^2-\frac{1}{8}\alpha e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$
110	30	$+\left(-\frac{147}{8}e'^2-\frac{147}{8}\alpha e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$
112	32	$+\left(-6e^2-3\alpha e^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$
117	23	$+\left(-\frac{9}{4}e'^2+\frac{9}{4}\alpha e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$
118	24	$+\left(-\frac{9}{4}e'^2-\frac{9}{4}\alpha e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$
120	25	$-\frac{1}{4}e^2\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$
136	33	$-9\gamma_o^2\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$
10	213	$\left\{\begin{array}{l}+\left(-\frac{81}{32}-\frac{81}{32}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B_1't^4\\+\left(\frac{27}{4}+\frac{27}{4}\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2A_1't^3\end{array}\right.$
37	91	$\left\{\begin{array}{l}+\left(\frac{27}{32}+\frac{27}{64}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B_1't^4\\+\left(-\frac{9}{4}-\frac{9}{8}\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2A_1't^3\end{array}\right.$
42	94	$\left\{\begin{array}{l}+\frac{63}{16}\alpha\cdot n'\alpha e'^2A_1't^3\\+\frac{63}{8}\alpha\cdot e'^2B_1't^2\end{array}\right.$

52	76	$\left\{\begin{array}{l} +\left(\frac{27}{16}+\frac{27}{8}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2 e'^2 B_1' t^3 \\ +\left(-\frac{9}{2}-9\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2 A_1' t^3 \end{array}\right.$
114	34	$\left\{\begin{array}{l} -\frac{189}{32}\alpha\cdot n'\alpha e'^2 A_1' t^3 \\ -\frac{189}{16}\alpha\cdot e'^2 B_1' t^3 \end{array}\right.$
132	24	$\left\{\begin{array}{l} \left(+-\frac{9}{16}-\frac{9}{16}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2 e'^2 B_1' t^3 \\ \left(+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2 A_1' t^3 \end{array}\right.$
12	33	$+\left(-\frac{3}{2}+\frac{15}{16}\alpha^2-24\gamma_0^2+\frac{39}{4}e^2-\frac{9}{4}e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$
13	34	$+\left(\frac{21}{16}\alpha-\frac{189}{512}\alpha^2+\frac{189}{4096}\alpha^3-\frac{117}{8}\alpha\gamma_0^2+\frac{63}{16}\alpha e^2 - \frac{105}{16}\alpha e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$
41	4	$-\frac{189}{32}\alpha e'^2\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$
43	5	$+\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2-14\gamma_0^2+\frac{3}{2}e^2+\frac{3}{2}e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$
45	90	$+\left(-\frac{27}{8}e'^2+\frac{27}{16}\alpha e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$
46	91	$+\left(-\frac{27}{8}e'^2-\frac{27}{16}\alpha e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$
47	92	$+\left(54\gamma_0^2-\frac{27}{2}e^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$
48	93	$+\left(-6\gamma_0^2-\frac{3}{2}e^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$
49	94	$+\frac{21}{32}\alpha e'^2\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$
50	95	$+\frac{343}{32}\alpha e'^2\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$
51	96	$+\left(-\frac{3}{2}e^2-6\gamma_0^2+3\alpha e^2+12\alpha\gamma_0^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$
111	31	$-\frac{375}{16}\alpha e^2\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$
115	23	$+\left(\frac{9}{4}e'^2-\frac{9}{4}\alpha e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

116 24 $+\left(\frac{9}{4}e'^2+\frac{9}{4}\alpha e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

119 25 $+\frac{1}{4}e^2\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$

13 22 $\begin{cases}-\frac{189}{32}\alpha\cdot n'\alpha e'^2 A'_1 t^3\\ -\frac{189}{16}\alpha\cdot e'^2 B'_1 t^2\end{cases}$

46 6 $\begin{cases}+\left(\frac{81}{16}+\frac{243}{64}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^3\\ +\left(-\frac{27}{2}-\frac{81}{8}\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2 A'_1 t^3\end{cases}$

49 4 $\begin{cases}+\frac{63}{16}\alpha\cdot n'\alpha e'^2 A'_1 t^3\\ +\frac{63}{8}\cdot e'^2 B'_1 t^2\end{cases}$

51 75 $\begin{cases}+\left(-\frac{27}{16}+\frac{27}{8}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^3\\ +\left(\frac{9}{2}-9\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2 A'_1 t^3\end{cases}$

122 1 $\begin{cases}+\left(-\frac{243}{16}-\frac{729}{32}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^3\\ +\left(\frac{81}{2}+\frac{243}{4}\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2 A'_1 t^3\end{cases}$

124 27 $\begin{cases}+\left(-\frac{243}{32}-\frac{243}{32}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^3\\ +\left(\frac{81}{4}+\frac{81}{4}\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2 A'_1 t^3\end{cases}$

126 29 $\begin{cases}+\left(\frac{27}{32}+\frac{9}{32}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^3\\ +\left(-\frac{9}{4}-\frac{3}{4}\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2 A'_1 t^3\end{cases}$

130 23 $\begin{cases}+\left(\frac{9}{16}-\frac{9}{16}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^3\\ +\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2 A'_1 t^3\end{cases}$

273 8 $\begin{cases}+\left(\frac{729}{32}+\frac{729}{16}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^3\\ +\left(-\frac{243}{4}-\frac{243}{2}\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2 A'_1 t^3\end{cases}$

275	9	$\begin{cases} +\left(-\frac{81}{32}-\frac{27}{16}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4 \\ +\left(\frac{27}{4}+\frac{9}{2}\alpha\right)\cdot n'\alpha e'^2A'_1t^3 \end{cases}$
1	57	$+\left(-\frac{567}{64}-\frac{405}{32}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$
6	15	$+\left(\frac{189}{64}+\frac{135}{64}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$
8	159	$+\left(\frac{729}{64}+\frac{729}{32}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$
9	161	$+\left(-\frac{81}{64}-\frac{27}{32}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$
23	65	$+\left(\frac{9}{32}-\frac{9}{32}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$
27	59	$+\left(-\frac{243}{64}-\frac{243}{64}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$
29	61	$+\left(\frac{27}{64}+\frac{9}{64}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$
75	20	$+\left(-\frac{27}{32}+\frac{27}{16}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$
24	67	$+\left(-\frac{9}{32}-\frac{9}{32}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$
76	21	$+\left(\frac{27}{32}+\frac{27}{16}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$
21	76	$+\left(-\frac{27}{32}-\frac{27}{16}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$
67	24	$+\left(\frac{9}{32}+\frac{9}{32}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$
15	6	$+\left(-\frac{189}{64}-\frac{135}{64}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$
20	75	$+\left(\frac{27}{32}-\frac{27}{16}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$
57	1	$+\left(\frac{567}{64}+\frac{405}{32}\alpha\right)\ n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$
59	27	$+\left(\frac{243}{64}+\frac{243}{64}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$
61	29	$+\left(-\frac{27}{64}-\frac{9}{64}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$
65	23	$+\left(-\frac{9}{32}+\frac{9}{32}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$

159	8	$+\left(-\frac{729}{64}-\frac{729}{32}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^3$
161	9	$+\left(\frac{81}{64}+\frac{27}{32}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^3$
10	10	$+\left(-\frac{15}{8}\alpha^2-\frac{39}{16}\alpha^3\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$
42	42	$-\frac{189}{32}\alpha e'^2\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$
12	12	$-\frac{15}{8}\alpha^2\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$
13	13	$+\left(-\frac{21}{16}\alpha+\frac{63}{128}\alpha^2-\frac{189}{1024}\alpha^3+\frac{45}{4}\alpha\gamma_0^2-\frac{63}{16}\alpha e^2+\frac{105}{16}\alpha e'^2\right)\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$
41	41	$+\frac{189}{32}\alpha e'^2\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$
49	49	$-\frac{21}{32}\alpha e'^2\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$
50	50	$-\frac{343}{32}\alpha e'^2\cdot n'\alpha\left(A^2+B^2\right)t^3$
10	122	$+\left(\frac{81}{32}+\frac{81}{32}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^3$
37	46	$+\left(-\frac{27}{32}-\frac{27}{64}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^3$
42	49	$-\frac{63}{16}\alpha\cdot n'\alpha e'^2A'_1t^3$
114	13	$+\frac{189}{32}\alpha\cdot n'\alpha e'^2A'_1t^3$
13	114	$+\frac{189}{32}\alpha\cdot n'\alpha e'^2A'_1t^3$
46	37	$+\left(\frac{27}{32}+\frac{27}{64}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^3$
49	42	$-\frac{63}{16}\alpha\cdot n'\alpha e'^2A'_1t^3$
122	10	$+\left(-\frac{81}{32}-\frac{81}{32}\alpha\right)\cdot n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^3$

Si l'on rassemble, dans ce tableau, toutes les parties qui contiennent le facteur B'_1t^3, on trouve qu'elles se détruisent deux à deux : le terme en t^3 dans $\delta_2 l$ est donc nul, ou du moins il est le

produit de $n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4$ par un facteur qui est au moins du second degré. Cela suffit pour conclure que ce terme est négligeable dans les limites des temps historiques.

On trouve également une somme nulle en additionnant toutes les parties du tableau précédent qui contiennent $A'_1 t^3$: le terme de $\delta_2 l$ qui renferme $A'_1 t^3$ en facteur est donc nul, ou du moins il est le produit de $n'\alpha e'^2 A'_1 t^3$ par un facteur qui est au moins du second degré. On conclut de là que ce terme est encore négligeable.

Les parties qui renferment le facteur $(A^2+B^2)t^3$ ne se détruisent pas complétement; leur somme est

$$\left(\frac{7067}{1536}-\frac{2547}{4096}\alpha\right)n'\alpha^3\left(A^2+B^2\right)t^3.$$

Enfin la somme des parties où se trouve le facteur $B'_1 t^2$ est

$$-\frac{9}{8}\alpha e'^2 B'_1 t^2.$$

Ainsi le déplacement du plan de l'écliptique introduit dans la longitude moyenne de la Lune la partie non périodique et non proportionnelle au temps

$$\delta_2 l=\left(\frac{7067}{1536}-\frac{2547}{4096}\alpha\right)n'\alpha^3\left(A^2+B^2\right)t^3-\frac{9}{8}\alpha e'^2 B'_1 t^2.$$

La réduction en nombres montre que le coefficient $-\frac{9}{8}\alpha e'^2 B'_1$ de t^2 est inférieur à $0'',000\,000\,02$; le terme en t^2 est donc insensible. Il nous reste par conséquent, en réduisant en nombre le coefficient de t^3,

$$\delta_2 l=+0'',003\,28\,t^3.$$

Si l'on réunit ce terme en t^3 au terme ct^2 que la diminution de l'excentricité de l'orbite terrestre introduit dans la longitude moyenne de la Lune, la somme pourra s'écrire $(c+0'',003\,28\,t)t^2$. Il en résulte que, pour une époque antérieure de 25 siècles à l'époque actuelle ($t=-25$), le déplacement de l'écliptique a

pour effet de diminuer de 0",08 le coefficient de l'accélération séculaire.

Les anciennes éclipses paraissent exiger, au contraire, que ce coefficient soit accru de 4 à 6 secondes : ainsi, comme nous l'avons annoncé, ce n'est pas dans le fait du déplacement du plan de l'orbite terrestre qu'on peut trouver l'explication du désaccord qui semble exister sur ce point entre la théorie et l'observation.

Cette conclusion ne pouvait résulter, d'ailleurs, que du calcul de l'ensemble des termes que nous avons déterminés ci-dessus : car, parmi ces termes, il y en a plusieurs qui, pris isolément, modifieraient beaucoup l'accélération du mouvement de la Lune. Par exemple, les deux termes en t^3 égaux et de signes contraires que fournissent les combinaisons 8 273 et 273 8 ont pour valeur numérique $\pm 0'',0128\, t^3$; si l'un d'eux existait seul, il augmenterait ou diminuerait de 8 secondes le coefficient de l'accélération applicable à l'époque $t = -25$. Ainsi encore, les combinaisons 8 39 et 39 8 donnent des termes en t^3 qui, pris séparément, altéreraient ce coefficient, l'un de $+50''$, l'autre de $-51''$, tandis que, réunis, ils le diminueraient de 1 seconde seulement. Il était donc nécessaire de s'assurer, comme nous l'avons fait, que ces différents termes se détruisent à très-peu près.

Nota. Pour la réduction en nombres des formules de ce Mémoire, on a fait usage des valeurs suivantes :

$$e = 0,054\,906, \quad \gamma_{\circ} = \sin 9264'', \quad e' = 0,01677, \quad \varpi' = 280^\circ 21' 40'',$$

$$A = +2'',944, \quad B = -23'',783, \quad \frac{n'}{100} = 1\,295\,977'', \quad \frac{n'}{n} = \alpha = 0,074\,39.$$

